Estratto da:
Pensare proiettivo*

Ciro Ciliberto

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"
Via della Ricerca Scientifica - 00133 Roma, Italia

cilibert@mat.uniroma2.it

Introduzione

Il 7 Febbraio del 2015 si gioca allo Juventus Stadium di Torino l'incontro di calcio Juventus–Milan, importante per la corsa allo scudetto. Al 14esimo minuto della gara, Carlos Tevez, attaccante della Juventus, segna un goal partendo da una sospetta posizione di fuorigioco. L'arbitro convalida comunque il goal tra le proteste dei milanisti. All'epoca non c'era il VAR (Video Assistant Referee). Tuttavia la partita era ripresa in TV e, con il fermo immagine, i telespettatori avrebbero facilmente potuto verificare se la decisione dell'arbitro era stata corretta o meno. Nell'intervallo tra il primo e il secondo tempo viene diffuso il replay dell'azione con il fermo immagine decisivo. L'immagine viene messa in onda con una linea disegnata che mostra come un giocatore del Milan a centro campo tenga in gioco Tevez, che è l'ultimo in basso a destra (cfr. Figura 1).

Figura 1

Ma questo punto divampano le polemiche: la linea è disegnata correttamente? Dovrebbe essere parallela alla linea di centrocampo, lo è? A guardarla, dicono alcuni, non pare proprio.

La società milanese twitta: "Secondo voi nel fermo immagine tv prodotto dalla Juventus le due linee sono parallele? Per noi no". E nel dopopartita un alto dirigente del Milan, a suo tempo diplomatosi geometra (sic!), rincara la dose prendendosela con la Juventus che a suo dire ha diffuso immagini falsate.

*L'articolo completo comparirà nel numero 1 di Linea Matematica.

La prima cosa sensata la dice Fabio Caressa, noto telecronista, che a proposito della linea “storta” afferma che “sembra così perché occorre tener conto della prospettiva rispetto alla posizione esattamente centrale della telecamera”. Alla fine mette tutti d'accordo, o almeno così dovrebbe essere in un paese civile ed educato, la seguente immagine (Figura 2), da cui risulta che la linea di centrocampo e la linea disegnata effettivamente non appaiono parallele sullo schermo, ma si intersecano nel *punto di fuga*. Infatti, come la teoria della prospettiva insegna (e la cosa, come vedremo, era ben nota già ad Euclide 2300 anni fa, ma evidentemente era sfuggita ai dirigenti del Milan), rette parallele tra loro nella realtà, e parallele al piano della visione, possono non apparire parallele sullo schermo, poiché appaiono passare tutte per il cosiddetto punto di fuga, come mostra la Figura 2. Pertanto, tenendo presente la prospettiva, la riga apparentemente “storta”, è in realtà parallela alla linea di centrocampo. Questa immagine è stata prodotta da un signore che twitta: “... oggi imparate la prospettiva! Visto che siamo in un Paese sempre più ignorante”.

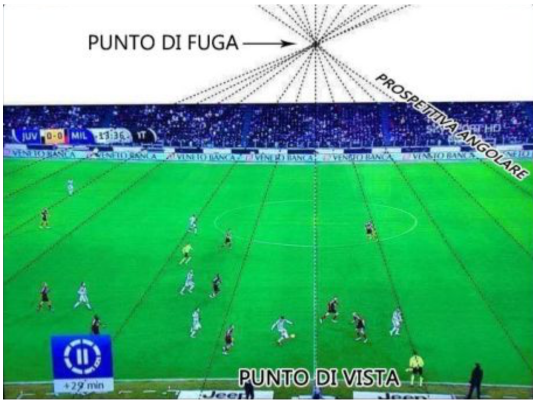

Figura 2

Da questa storia impariamo un paio cose. Primo, che l'ignoranza è davvero una brutta bestia, che fa incorrere in degli infortuni veramente monumentali. Secondo che conoscere un po' di matematica, in particolare, in questo caso, di geometria è opportuno.

La storiella che ho raccontato ci introduce all'argomento di questo articolo, che è la geometria proiettiva. La geometria proiettiva è una evoluzione della geometria euclidea alla quale siamo abituati a pensare, in quanto introduce delle nuove entità, cioè i punti all'infinito delle rette, che apparentemente sembrano delle mere “finzioni matematiche”. Ma non è così, come cerco di provare in questo scritto. Per prima cosa i punti all'infinito, di cui i punti di fuga sono una manifestazione concreta, hanno una realtà ben precisa nel disegno e nell'arte (e, a quanto abbiamo visto anche nello sport). Inoltre hanno una realtà sensoriale innegabile. Dal punto di vista matematico inoltre la geometria proiettiva è una teoria affascinante, che ha avuto una storia millenaria complessa ed intrigante, che ha giocato e gioca tutt'ora un ruolo centrale in molti sviluppi importanti di ricerca.

In questo articolo ho cercato, senza entrare in dettagli tecnici e senza alcuna pretesa di completezza, di spiegare le origini della geometria proiettiva, le sue profonde relazioni con la prospettiva nel disegno, nell'arte e nella tecnica, e di ripercorrere la sua storia. L'articolo penso possa essere utile per i docenti di scuola secondaria superiore, come stimolo per elaborare insieme ai loro allievi dei percorsi laboratoriali su questo argomento, insieme, ad esempio, ai docenti di disegno, di storia dell'arte, di storia, di geografia, di latino e greco, di materie tecniche.

L'articolo è organizzato come segue. Nella Sezione 1 introduco i punti all'infinito e lo spazio proiettivo, sollevando, tra l'altro, un problema psico–cognitivo cui risponderò più avanti. Nella Sezione 2 parlo della prospettiva, che è il primo ambito in cui i punti all'infinito si manifestano e si rendono, in qualche modo, concretamente percepibili. Dopo aver introdotto i concetti fondamentali della prospettiva, mi dilungo un po' sulla storia lunga e affascinante di questo soggetto. Nella Sezione 3 parlo di gnomonica (che tratta di meridiane e orologi solari) e cartografia, che sono argomenti strettamente legati alla prospettiva. Nella Sezione 4 ritorno alla geometria proiettiva. Innanzitutto do una risposta al problema psico–cognitivo sollevato nella Sezione 1 e percorro brevemente la storia degli sviluppi della geometria proiettiva dal XVII al XX secolo. Poi tratto dell'approccio assiomatico alla geometria proiettiva, parlando anche dei famosi teoremi di Desargues e Pappo e del ruolo fondamentale che essi ricoprono nello sviluppo dell'algebra geometrica, che consente, sotto opportune ipotesi, di introdurre opportune coordinate numeriche negli spazi proiettivi. Concludo questa sezione trattenendomi sul disegno prospettico di una pavimentazione e di un colonnato. Concludo con la Sezione 5 in cui discuto della topologia del piano proiettivo reale e della sua impossibilità di essere realizzato nello spazio tridimensionale.