Varie considerazioni nei rapporti fra Arte figurativa e Matematica

Bruno D'Amore[1 2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]
[1]Doctorado Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
[2]NRD, Dipartimento di matematica, Università di Bologna, Italia

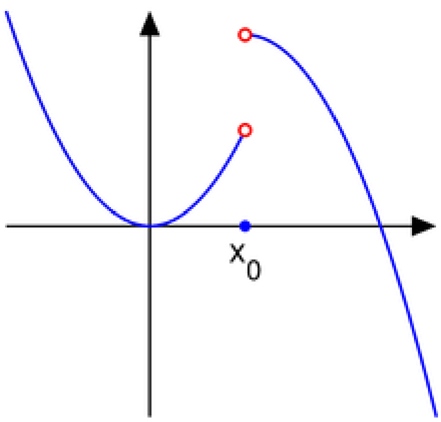
bruno.damore@unibo.it
marisafp@hotmail.it

Sommario. In questo testo proponiamo varie considerazioni che a nostro avviso regalano vari legami, alcuni dei quali inattesi, fra matematica e arte figurativa, allo scopo di fornire materiale di riflessione culturale generale e suggerire ipotesi di lavoro nelle ore di matematica a scuola.

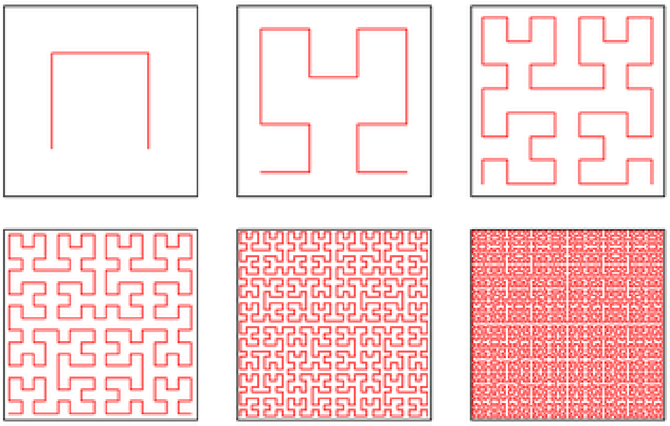
Abstract. In this paper, we propose various considerations that in our view provide various links, some of them unexpected, between mathematics and figurative art, with the aim of providing material for general cultural reflection and suggesting working hypotheses in school mathematics lessons

1. Singolarità

Il termine "singolarità" in Matematica indica un qualcosa (oggetto o situazione) che, rispetto ad altri analoghi nel contesto, ha un ruolo particolare, che si discosta dalla "normalità" o "regolarità" imperanti o attese per un qualche motivo. In molti campi della Matematica esistono situazioni o oggetti per i quali si può parlare di singolarità e le interpretazioni che se ne danno nei diversi contesti specifici possono essere anche assai diverse tra loro.
In Analisi, per esempio, si parla di singolarità quando si presentano punti di discontinuità; per chiarire: supponiamo di avere una funzione *f* a valori reali; supponiamo che, in un certo punto P (di ascissa x_0) del dominio di *f*, *f* stessa non sia continua. In tal caso P è detto "punto di discontinuità di *f*".
Come sinonimo, molti autori dicono che P è una singolarità (si possono distinguere vasi casi di singolarità).



In altri domini, per esempio in Analisi complessa, si parla ancora di singolarità, con significati assai più specifici.
In Algebra lineare si riserva il nome di matrice singolare a una matrice quadrata il cui determinante è nullo o il cui rango non è il massimo; il che comporta che le matrici singolari non sono invertibili, cioè non esiste per esse una matrice tale che il loro prodotto sia la matrice identità.
In Geometria algebrica, i punti singolari sono quei punti di una data varietà (per esempio una curva) che hanno comportamenti speciali, diversi dagli altri punti della stessa curva.
In maniera efficace, ma in versione più divulgativa, spesso con "singolare" si intende un oggetto matematico che (o una situazione matematica nella quale) si presenta qualcosa che pare sfuggire alla logica attesa.
Per esempio, al finale del XIX secolo il matematico italiano Giuseppe Peano (1858 – 1932) mostrò agli occhi increduli del mondo accademico una curva costruita per successive generalizzazioni che presenta una caratteristica che ha dell'impossibile. Nel suo caso si trattava di definire in modo opportuno e ineccepibile una curva (dunque un oggetto unidimensionale) che ha la proprietà di riempire un quadrato (dunque un oggetto bidimensionale).

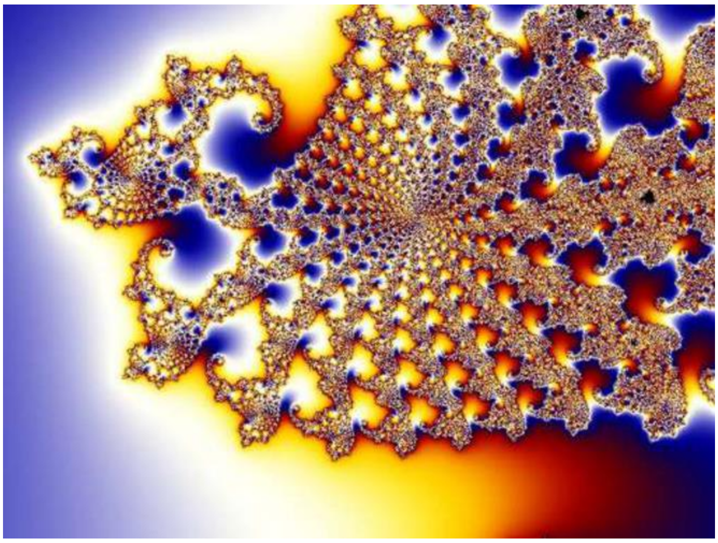


Una successione di fasi della costruzione della curva di Peano.

Ora, questa situazione è paradossale se considerata dal punto di vista strettamente geometrico: una curva (dimensione 1) non può riempire un quadrato (dimensione 2). Proprio la … singolarità della costruzione iterativa proposta da Peano, invece, lo permette.
L'oggetto matematico in questione e la situazione prodotta sono così inaspettatamente geniali (singolari) che artisti di vario interesse hanno voluto rendere omaggio a Peano.

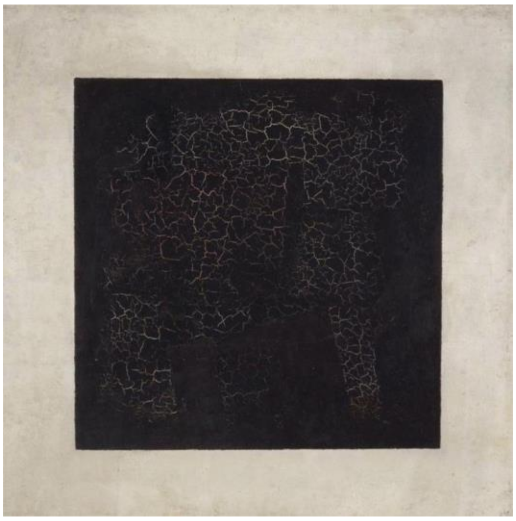
Dario Ghibaudo, *Curva di Peano*, 1998, Cuneo.

Molti considerano singolarità anche i frattali, cioè quegli oggetti che appartengono al campo della Geometria e che replicano sé stessi in scale diverse, essendo dotati di omotetia interna. C’è chi la chiama *autosimilarità*. Il termine iniziale è di Benoît Mandelbrot (1924 – 2010), metà degli anni ‘70 del secolo scorso. Sono oggetti geometrici singolari assai, molto amati anche nel mondo dell’Arte figurativa.



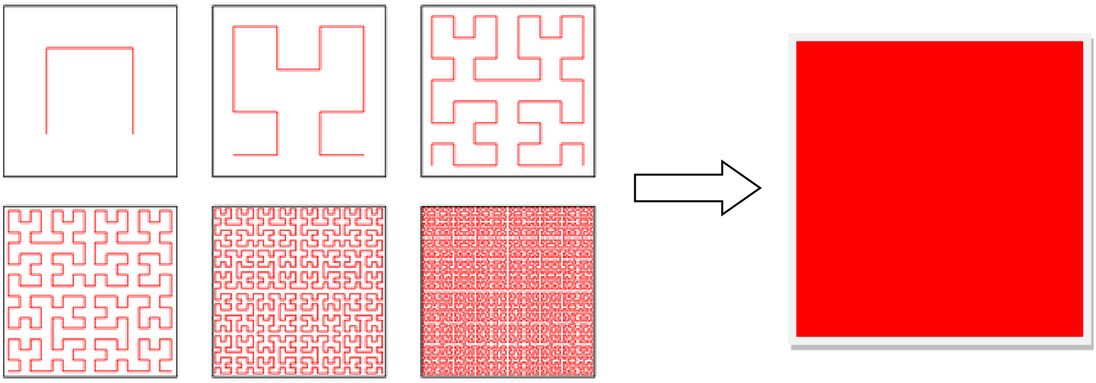
Esempio di frattale.

Il mondo delle singolarità, in ogni dominio dello scibile umano, costituisce un fascino discreto e sottile perché, rubando alla “normalità” un predominio esistenziale, costringe lo studioso, il coraggioso esploratore di mondi inconsueti, a rincorrere (e realizzare) sogni, fantasie, sottili e arcane armonie che si discostano dalla ripetizione ossessiva e normale …
Passando a tutt’altro campo, ricordiamo che il grande artista russo Kazimir Malevich (1879 – 1935) espose la sua opera più famosa (*Quadrato nero*) nella Galleria Tretyakov a Mosca, nel 1915, in occasione della *Last Futurist Exhibition*. Si trattava di un olio su lino, di 79.5×79.5 cm. Visto il grandissimo successo internazionale, ne fece successivamente (e con una certa facilità!) quattro varianti fra la fine degli anni ‘20 e i primi ‘30.
A nostro avviso, l’opera era tanto rivoluzionaria, quanto quella di Peano … E, in un certo senso, relativamente simile, almeno come aspetto finale …



Kazimir Malevich, *Quadrato nero*, prima versione: 1915.

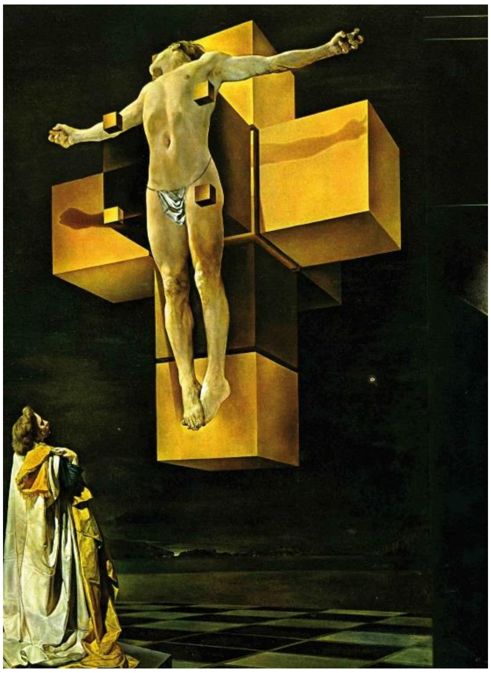
E, difatti, è impossibile resistere al fascino dell'analogia figurale …



Giuseppe Peano, Curva di Peano, iterazione. Realizzata nel 1890 circa.

2. Più dimensioni

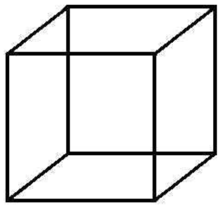
A proposito di dimensioni, in Geometria, è ben noto che riflessioni teoriche portano a considerare lo studio teorico di spazi a più di 3 dimensioni.
Ma non si creda che questo fatto sia esclusivo per la Matematica.



Salvador Dalì (1904 - 1989), *Crocefissione, corpo ipercubico*, 1954, olio su tela, 58,4 × 73,7 cm, Metropolitan Museum of Art. New York.

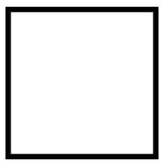
Nell'opera *Crocefissione, corpo ipercubico* del 1954 di Salvador Dalì, appare una croce di grande suggestione matematica, composta di cubi, assolutamente corretta sul piano epistemologico; ma chi la osserva, di solito, non si rende conto della profonda sapienza matematica nascosta in questo dipinto. Ci pare il caso di dare i semplicissimi dettagli matematici di questa creazione, anche per testimoniare la competenza matematica del geniale pittore catalano.

Cominciamo con l’osservare almeno mentalmente un cubo, che è un oggetto matematico tridimensionale (3D).



Rappresentazione bidimensionale in prospettiva di un cubo.

Le sue sei facce (bordi del cubo) sono quadrati, oggetti matematici a due dimensioni (2D).
Nulla ci impedisce di pensare di proiettare il cubo perpendicolarmente su uno dei piani che passano per una delle sue facce. Tale proiezione dà luogo a un quadrato.



Rappresentazione bidimensionale di un cubo proiettato perpendicolarmente sul piano di una delle sue facce.

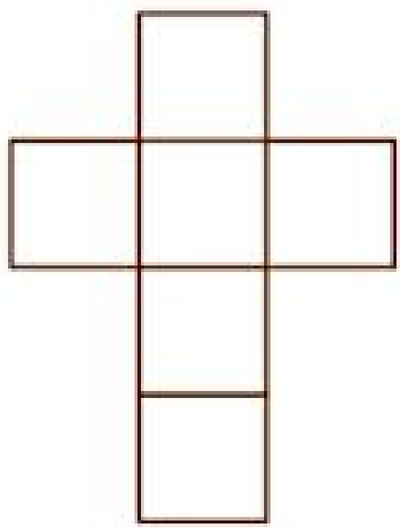
I suoi quattro lati (bordi del quadrato) sono segmenti, oggetti matematici a una dimensione (1D).
Nulla ci impedisce di pensare di proiettare il quadrato perpendicolarmente su una delle rette che passano per uno dei suoi lati. Tale proiezione dà luogo a un segmento.

Rappresentazione unidimensionale di un quadrato proiettato perpendicolarmente sulla retta di uno dei suoi lati.

I suoi due vertici (bordi del segmento) sono punti, oggetti matematici a zero dimensione (0D).
Nulla ci impedisce di pensare di proiettare il segmento su uno dei suoi vertici.
Tale proiezione dà luogo a un punto che indicheremo qui con una macchietta di inchiostro.

Punto.

Dunque, il punto si può pensare come una rappresentazione del cubo in uno spazio 0D, il segmento come una rappresentazione del cubo in uno spazio 1D, il quadrato in uno spazio 2D.
Ma chi ci impedisce di generalizzare il ragionamento per spazi di dimensione 4? Così come il quadrato è la rappresentazione di un cubo in 2D, il cubo si può pensare come la proiezione in 3D di un ipercubo in uno spazio 4D: impossibile anche solo tentare di rappresentarlo.
Tuttavia …
Se vogliamo passare dal quadrato 2D al cubo 3D, possiamo operare come segue:
disegniamo il quadrato, disegniamo in corrispondenza di ogni suo bordo (che è un lato) un quadrato uguale (e siamo a 5 quadrati tutti uguali); e poi disegniamo su un bordo esterno (che è un lato di uno dei quadrati aggiunti) un altro quadrato uguale; e siamo a sei quadrati uguali disposti come segue.

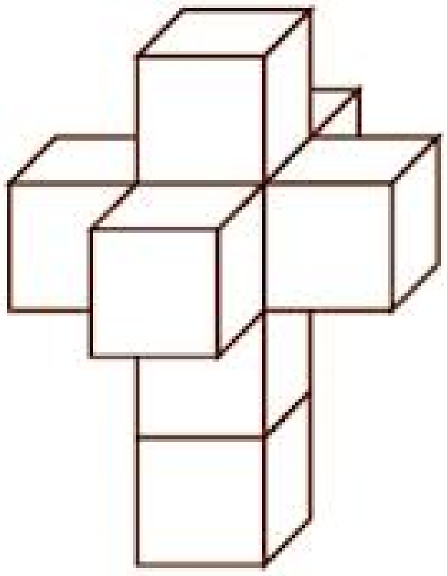


Cinque quadrati disposti attorno a uno dato, tutti uguali tra loro.

Ora la figura si può richiudere, com'è facilmente comprensibile a chiunque, per ottenere il cubo di partenza.
Lo stesso procedimento si può ottenere a partire dal segmento (1D) per ottenere un quadrato che lo abbia come lato.
Disegniamo il segmento, ai suoi bordi (che sono due) si disegnano su ciascuno un segmento uguale; al bordo esterno dei segmenti aggiunti si disegni un nuovo segmento uguale.

Quattro segmenti disposti attorno a uno dato, tutti uguali fra loro.

Ora è facile "ripiegare" la figura per riavere il quadrato di partenza.
Lo stesso è possibile partendo dal punto (0D); ai suoi bordi si dovrebbero applicare dei punti, ma il punto, avendo dimensione zero, non ha bordi; allora ci limitiamo a immaginare un altro punto oltre a quello di partenza; abbiamo dunque 2 punti che costituiscono un segmento.
La formula che sta nascendo è dunque costituita come segue:
l'oggetto matematico di partenza (1) + tanti oggetti uguali quanti sono i suoi bordi + un ulteriore oggetto identico a quello di partenza;
nel caso del punto: 1+0+1=2 (risultato: segmento, composto da 2 punti)
nel caso del segmento: 1+2+1=4 (risultato: quadrato, composto da 4 lati - segmenti)
nel caso del quadrato: 1+4+1=6 (risultato: cubo, composto da 6 facce - quadrati). Se vogliamo ora passare al caso 4D, cioè all'ipercubo, possiamo ipotizzare una situazione aritmetica dello stesso tipo: 1+6+1, ossia:
il cubo di partenza + 6 cubi identici attaccati alle 6 facce del cubo + 1 cubo attaccato a una faccia di un cubo esterno.



Otto cubi disposti attorno a uno di loro, tutti uguali fra loro.

Questa immagine, dunque, rappresenterebbe, proiettato in 3D, un ipercubo 4D; ma siccome il foglio che ospita tutto ciò è 2D, quella che possiamo vedere qui non è altro che la rappresentazione in 2D della rappresentazione in 3D dell'ipercubo 4D.
Se ora si torna ad ammirare l'opera *Crocefissione, corpo ipercubico* di Salvador Dalì, la meraviglia non può più essere solo legata alla questione artistica, ma anche all'abilità e alla competenza matematica nascosta, non evidenziata, posta nel titolo dell'opera, data per scontata in chi esegue e in chi ammira …

3. "Forma" in scienza e in poesia

Ci piace proporre qui alcune considerazioni relative all'idea di forma, fornite da matematici e non.
Che cos'è la forma?
René Thom (1923 – 2002): una discontinuità qualitativa su un sostrato continuo.
Giuseppe Di Napoli: un'astrazione librata tra l'idea e la materia.
E sulle relazioni fra scienza e poesia:

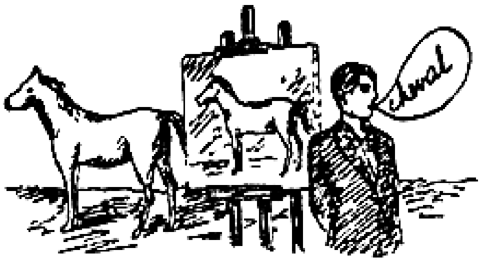
Leonardo Sinisgalli (1908 – 1981): «La scienza e la tecnica ci offrono ogni giorno nuovi ideogrammi, nuovi simboli, ai quali non possiamo rimanere estranei o indifferenti, senza il rischio di una mummificazione o di una fossilizzazione totale della nostra coscienza e della nostra vita (…). Scienza e poesia non possono camminare su strade divergenti. I poeti non devono aver sospetto di contaminazione. Lucrezio, Dante e Goethe attinsero abbondantemente alla cultura scientifica e filosofica dei loro tempi senza intorbidare la loro vena. Piero della Francesca, Leonardo e Dürer, Cardano, Della Porta e Galilei hanno sempre beneficiato di una simbiosi fruttuosissima tra la logica e la fantasia».

4. Semiotica

Un altro formidabile legame tra Arte figurativa e Matematica ha a che fare con problemi relativi alla Semiotica. In Arte figurativa è ovvio che questi siano onnipresenti, ma non tutti li riconoscono nella Matematica. È uno dei temi che hanno sollevato i recenti studi in Didattica della matematica e che ora sono evidenti.
Quando si parla di teoria del significato, il pensiero corre rapido alla Psicologia, alla Semiotica, alla Linguistica o alla Matematica.
Ma non si deve pensare che questo tipo di problematiche interessi solo questi settori di ricerca e di analisi. Ogni disciplina che si rispetti, che voglia mettere in campo una riflessione sugli oggetti del proprio conoscere e del proprio specifico rappresentare, prima o poi è costretta a entrare nei meriti della questione. Tanto più se si serve di rappresentazioni del significato (locuzione che, per ora, usiamo in modo ingenuo), com'è costretta a fare la Matematica (Duval, 1993; D'Amore, 2000, 2001a, b, c, 2003a).
In Matematica, infatti, a causa del fatto che gli "oggetti" evocati non hanno natura reale (in un realismo ingenuo a carattere cosale), non si può fare altro, se non ricorrere a *rappresentazioni* di essi all'interno di una Semiotica opportuna; cosicché il matematico, mentre cita e parla di oggetti nel dominio della Matematica, di fatto sceglie, manipola e trasforma loro rappresentazioni (concrete) in registri semiotici.
Un caso del tutto analogo alla Matematica, forse inatteso per i più, è decisamente costituito dall'Arte figurativa. Se anche non si vuol complicare la questione e si assume, in modo decisamente acritico e storicamente superato, che l'arte sia lo studio delle interpretazioni delle rappresentazioni figurali problematiche degli oggetti e dei fenomeni della natura, ovviamente soprattutto compresa quella umana, appare piuttosto evidente che ogni rappresentazione nel mondo figurale allude a un oggetto o a un fenomeno, ma è distinto da essi. Ogni prodotto artistico è, alla fine, esso stesso un oggetto o un fenomeno della natura.
Così, apparve subito necessaria e rivelatrice l'opera di riflessione sulla natura del linguaggio dell'arte e sul senso del rapporto tra significato e rappresentazione, del geniale pittore surrealista belga René Magritte (1898 - 1967). Queste sue riflessioni spesso costituivano a loro volta vere e proprie opere d'arte, come la celeberrima *Ceci n'est pas une pipe*, che Magritte realizzò in diverse versioni tra il 1929 e il 1946.

René Magritte, *Ceci n'est pas une pipe*, varie versioni tra il 1929 e il 1946.

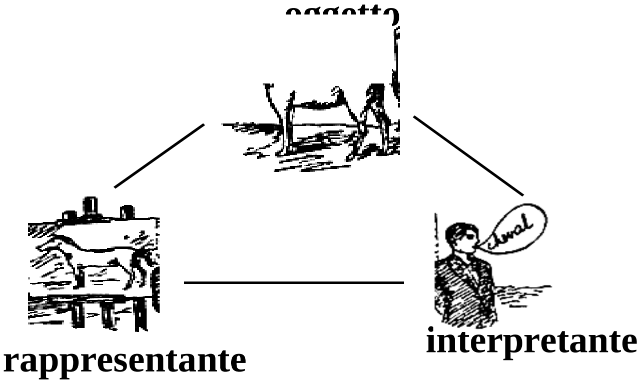
Al di là dell’imbarazzo che creò al suo apparire esposta, vista con gli occhi critici e acuti di oggi, il senso di questa opera, volutamente divulgativa, è del tutto evidente: quel che l’osservatore ha di fronte a sé NON è una pipa, infatti, ma una sua rappresentazione che a una pipa allude; quel che si vede, insomma, è una rappresentazione, un’allusione, un’evocazione, non l’oggetto in sé.
A volte, invece, Magritte ama elaborare veri e propri studi teorici, come l’altrettanto famoso *Les mots et les images* (1929) che, pur essendo, come dicevamo, uno studio teorico, venne anch’esso esposto come opera.
All’interno di questo studio, forse il particolare più famoso e discusso è quello relativo all’immagine del cavallo la cui evidenza è totale. Vi appare un cavallo, una sua rappresentazione pittorica, una sua enunciazione verbale (nel registro semiotico “linguaggio orale”). Non bisogna dimenticare, però, che il cavallo che appare alla sinistra dello schizzo è, a sua volta, un disegno.



René Magritte, *Les mots et les images*, 1929. Particolare.

Questa analisi del linguaggio pittorico non può non richiamare alla mente l’opera del logico matematico tedesco Gottlob Frege (1848 - 1925). Insieme ad altre immortali opere, Frege scrisse un articolo relativo alla natura e al senso della Matematica e del suo linguaggio: *Über Sinn und Bedeutung* (*Senso e denotazione*, pubblicato nel 1891); esso fu una vera e propria bomba nel mondo della riflessione matematica e contribuì ad aprire la strada a quel periodo di ripensamento critico che va sotto il nome di *Crisi dei fondamenti* e che portò al modo attuale di concepire la Matematica (D’Amore & Matteuzzi, 1975).
In tale articolo, che fu poi l’occasione di una polemica annosa con Giuseppe Peano, Frege proponeva in maniera netta una distinzione tra “concetto” e “oggetto” secondo la quale il primo è un’espressione che non denota in modo specifico avendo solo caratteristiche funzionali, e il secondo ha ruolo di argomento. Per esempio, un numero viene identificato con l’oggetto denotato da un concetto, ovvero con l’estensione di quel concetto.
Nell’altra sua celebre opera, *Die Grundlagen der Arithmetik-Eine logisch-matematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, pubblicata a Breslavia nel 1884, a p. 59 Frege afferma: «L’attribuzione di un numero contiene sempre un’affermazione intorno a un concetto. La cosa risulta particolarmente chiara per il numero 0. Quando si dice “Il pianete Venere ha 0 satelliti”, non vi è proprio alcun satellite o aggregato di satelliti intorno a cui possa venir affermato qualcosa. È invece al concetto “satellite di Venere” che l’asserto anzidetto attribuisce una proprietà (cioè quella di non comprendere nessun oggetto sotto di sé)».
Questa posizione, che non esitiamo ad annoverare tra quelle oggi cosiddette “realiste”, ebbe un grande successo fino agli anni ’70 del XX secolo, ma è attualmente in crisi a favore di posizioni “pragmatiste” (D’Amore, 2001a, c; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2001).
Fin dal 1883, dunque *prima* di Frege, il matematico, fisico e filosofo statunitense Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) aveva già cominciato a servirsi di schemi a forma triangolare per studiare le relazioni tra gli oggetti e le loro rappresentazioni, usando la terna: interpretante – rappresentante – oggetto. Ci sembra interessante trovare una descrizione della riflessione di Magritte secondo lo schema di Peirce (per una visione moderna della Semiotica, specie in versione matematica a uso

scolastico, si può vedere: D’Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013, il cui primo capitolo è un excursus storico dalle origini della Semiotica ai giorni nostri).



Lo schema triangolare di Peirce applicato all’opera di Magritte.

Ma chi vuole, può creare la propria interpretazione ternaria del “cavallo” di Magritte, usando il triangolo di

- Gottlob Frege: Sinn (senso) – Zeichen (espressione) – Bedeutung (denotazione), pubblicato nel 1892, come abbiamo già detto,

o quelli più recenti di

- Charles Kay Ogden (1889 – 1957), Ivor Armstrong Richards (1893 – 1979): referenza – simbolo – referente (pubblicato nel 1923).

Soffermandoci ancora per un momento sul mondo dell’Arte figurativa, facciamo nostra la tesi sostenuta dal grande storico dell’arte Filiberto Menna (1926 – 1988) (1975), secondo il quale la linea analitica dell’Arte moderna ha avuto negli studi e nelle riflessioni di Magritte un grande artefice. «(…) Magritte propone uno scollamento tra immagine e parola, tra definizione visiva (l’immagine della pipa) e definizione verbale (l’affermazione “Ceci n’est pas une pipe”), sconfessando il ruolo assertivo tradizionalmente attribuito al quadro in virtù della presenza (implicita o esplicita) di una didascalia (…) Dell’arte, egli ci dice, e del quadro in particolare, non è possibile predicare il vero e il falso e per dimostrare questo assunto affronta la questione dai fondamenti gnoseologici stabiliti dalle leggi della teoria dell’identità (…)» (Menna, 1975, pp. 58-59).
L’idea di Magritte ha avuto un lungo seguito (non ancora spento) tra gli artisti di tutto il mondo, specie tra coloro che, negli anni ‘60 - ‘80, sono stati gli artefici della corrente cosiddetta del “concettuale scientifico”, tra i quali ricordiamo qui solo lo statunitense Joseph Kosuth, citando due delle sue opere più famose: *Neon Electrical Light English Glass Letters White Eight* (1965) e *Three Chairs* (1965).
Il contenuto della prima opera è quanto descritto nel titolo, nel senso *esatto* di questa frase. Si tratta, cioè, di un riferimento autonimo, cioè il cui “senso” è il riferimento a sé stesso, come accade per la maggior parte dei segni della Matematica.
La seconda opera consiste in un oggetto (una sedia), la foto di tale sedia e la definizione di “sedia” tratta da un dizionario; non può non richiamare alla mente una sintesi delle opere di Magritte e Frege allo stesso tempo. Si tratta (della rappresentazione) di “una stessa” o di “tre diverse” sedie?

Per avere ulteriori riferimenti critici sull’arte figurativa dell’epoca, si possono vedere i già citati D’Amore e Menna (1974), D’Amore e Speranza (1977), D’Amore (2015); la storia di quel periodo (1970-1990) è ottimamente descritta da Giorgio Di Genova (1993), uno dei massimi studiosi di storia dell’arte.

Bibliografia

D’Amore, B. (2000). “Concetti” e “oggetti” in Matematica. *Rivista di Matematica dell’Università di Parma*, *6*(3), 143-151.

D’Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, (1), 4-30.

D’Amore, B. (2001b). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, (2), 150-173.

D’Amore, B. (2001c). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2002). Gérard Vergnaud. Voce sull’*Enciclopedia Pedagogica*. Appendice A-Z. 1508-1509. Brescia: La Scuola Ed.

D’Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47-51.

D’Amore, B, (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari: Dedalo.

D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (Ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. [Atti del “Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130].

D’Amore, B., & Matteuzzi, M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D’Amore, B., & Menna, F. (1974). *De Mathematica*. Roma: L’Obelisco. [Libro - catalogo di una mostra internazionale].

D’Amore, B., & Speranza, F. ed altri (1977). *Alcuni aspetti della critica analitica. Rapporti tra critica analitica e ricerca nelle arti visive*. Bologna: Galleria d’arte moderna. [Atti di un convegno, atto di nascita del filone dell’*arte esatta* che diede vita a una quantità elevata di mostre].

Di Genova, G. (1993). *Storia dell’arte italiana del ‘900*. Bologna: Bora.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Menna. F. (1975). *La linea analitica dell’arte moderna*. Milano: Einaudi.