È così, si vede!

Valerio Vassallo

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lille
Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé
F-59000 Lille, France

valerio.vassallo@univ-lille.fr

Indice

1 Origini

Oh, mistero! Quale mistero? Gli occhi. Tutto l'universo è negli occhi, perché gli occhi vedono l'universo, lo riflettono. Contengono l'universo, le cose e le creature, le foreste e gli oceani, gli uomini e le bestie, i tramonti, le stelle, le arti, tutto, essi vedono, raccolgono e portano via ogni cosa; e c'è anche di più negli occhi, c'è l'anima, c'è l'uomo che pensa, l'uomo che ama, l'uomo che ride, l'uomo che soffre! Oh, guardate gli occhi azzurri delle *donne, quelli che sono profondi come il mare, mutevoli come il cielo, così dolci, dolci come la brezza, dolci come la musica, dolci come i baci, e trasparenti, così chiari che lo sguardo li traversa, e vede l'anima, l'anima azzurra che li colora, che li anima, che li rende divini. Sì, l'anima ha il colore dello sguardo. Solo l'anima azzurra porta in sé il sogno, e ha tolto il suo azzurro alle onde e allo spazio. Gli occhi! Pensate agli occhi! Gli occhi bevono la vita apparente per nutrirne il pensiero. Bevono il mondo, il colore, il movimento, i libri, i quadri, tutto ciò che è bello e tutto ciò che è brutto, e lo traducono in idee. E quando ci guardano, ci danno la sensazione di una felicità che non è terrena. Ci fanno presentire ciò che ignoreremo per sempre; ci fanno capire che le realtà dei nostri sogni sono delle spregevoli sozzure..*

Questo magnifico brano, tratto dai "*Contes fantastiques, Un cas de divorce*" (edizioni Marabout, pp. 265-266), dello scrittore francese Guy de Maupassant, mi colpì moltissimo e servirà per dare il via a quest'articolo sull"*educazione allo sguardo*" con questa apertura letteraria di largo respiro. Non sarà questione d'olfatto, di tatto, del gusto e dell'udito anche se tutti i sensi hanno senza dubbio un ruolo molto importante nell'apprendimento. Anche i sogni talvolta ci suggeriscono qualcosa, soprattutto usando immagini, fisse o in movimento.

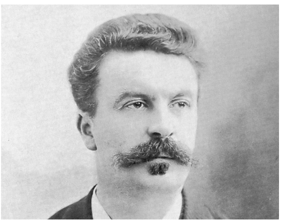
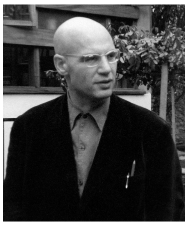



Figura 1: *Guy de Maupassant (1850 - 1893)* e *Alexandre Grothendieck (1928 - 2014)*

Mi rivolgo al lettore : cosa ci riserva lo sguardo ? Semplice osservazione, uno dei cinque sensi essenziali per interagire con il mondo che ci circonda, oppure molto di più ? Come rileggere il brano di Guy de Maupassant dal punto di vista dell'insegnante di matematica ? Come interrogare la nozione di " evidenza " ? Vedere significa comprendere ? Non è forse questo il ruolo dell'insegnante : prestare il proprio sguardo all'allievo perché questo non solo apra gli occhi sulla matematica ma apprenda ad amarla attraverso lo sguardo innamorato del professore.

Le domande sono tante. Sarà dunque importante precisare cosa si intende per educazione allo sguardo e come realizzare quest'educazione possibilmente nel modo migliore, seguendo quanto le ricerche e le esperienze portate avanti in questi anni suggeriscono fare. La definizione di educazione allo sguardo sarà data man mano. La lettura di quest'articolo (e del saggio che ne seguirà) potrà darne un'idea abbastanza completa.

"*È a quello che è in te che sa stare da solo, al bambino, è a lui a cui vorrei parlare e a nessun altro* " scriveva il grandissimo matematico Alexandre Grothendieck. Benché il mio articolo si rivolga ad un pubblico adulto, di professori essenzialmente, il mio atteggiamento in questa ricerca si ispira a quello spontaneo del bambino con la consapevolezza e lo spirito critico, sia ben chiaro, dell'uomo diventato adulto.

Con quasi certezza ho inizialmente percepito un interesse per lo sguardo quando, giovanissimo, studente al primo anno di liceo classico, imparai i tre casi d'uguaglianza dei triangoli, i casi di similitudine per i triangoli, oppure, abbordando la teoria delle rette parallele tagliate da una transversale, appresi l'uguaglianza degli angoli alterni/interni o alterni/esterni. Imparai pure che angoli complementari o supplementari di angoli uguali sono uguali. Fu allora che incontrando teoremi e esercizi dove bisognava ben *osservare* se due triangoli fossero o non fossero uguali oppure se due angoli fossero o non fossero uguali che lo sguardo diventò uno degli strumenti principali d'investigazione. Il che non mi lasciò indifferente.

Questo modo di affrontare la matematica non mi fu subito familiare. Mi accadeva di frequente di non vedere subito quanto occorreva vedere per raggiungere il risultato cercato. Eppure la professoressa di matematica soleva spesso ripetere : " È così, si vede !". La mia proverbiale lentezza irritava più di un professore. Dei banchi di nebbia, seppur piccoli, potevano diventare sempre più spessi fino ad occultare anche l'orizzonte... più vicino. Talvolta, come per incanto, uno spiraglio poteva presentarsi tra due banchi di nebbia. Allora vedevo, e vedevo anche con profondo piacere quanto poteva essere bella la matematica. Mi chiedevo, e mi chiedo ancora, quale poteva essere la frontiera tra vedere e intuire. Fino a dove spingere lo sforzo personale ? Per certi aspetti, la matematica e lo sport hanno proprio questo in comune : spingere sempre più in là i nostri limiti, l'una quelli della conoscenza, l'altro quelli del proprio corpo. Queste due sfide, di nature certamente diverse, possono affascinare un giovane quando gli stimoli degli insegnanti non si trasformino in stress insopportabili.

Il tempo che mi separa da quegli anni d'apprendistato non soltanto ha confermato l'interesse che avevo per la matematica e la voglia di scoprirne le chiavi per accedere a questo mondo, fatto di nozioni, di formule, di teoremi, di figure... ma ha anche aumentato la voglia di osservare finemente le situazioni matematiche che si presentavano per poter risolvere un problema o formulare delle congetture.

I primi anni d'università non fecero altro che rinforzare l'importanza, fattasi strada al liceo, riguardo all'osservazione ; ma, una volta l'osservazione fatta, come *dimostrare* che ciò che vedevo era vero nel senso matematico ? Quindi non era solo importante guardare, constatare un fatto, ma dimostrarlo. All'università, appresi dei concetti come quello di insiemi in corrispondenza biunivoca, di gruppi, anelli e campi *isomorfi*. In altre parole, insiemi o strutture diverse potevano assomigliarsi. E quando si parla di somiglianza c'è un richiamo ancora allo sguardo, alla capacità di riconoscere che oggetti diversi, pur non essendo uguali, sono almeno *isomorfi*.

Ma lo sguardo, come lo intendiamo qui, non è soltanto quanto si può vedere o constatare grazie alle conoscenze matematiche apprese nei corsi di matematica, ma è anche vedere ciò che può essere sottinteso nelle fasi di calcolo o, più in generale, di risoluzione di un problema. A titolo di esempio, anticipando quanto vedremo più dettagliatamente in seguito, nei casi di fattorizzazione può essere utile considerare un numero come il quadrato di un altro numero oppure, e, nel calcolo di una primitiva, considerare il numero 1 come la derivata della funzione $f(x) = x$. La matematica porta in sé, come le altre discipline, una nozione di "*spessore*".

Fin dal liceo fui attratto dalla personalità del matematico Bonaventura Cavalieri. Allievo di Galileo, attratto dalle speculazioni scolastiche sul movimento, l'infinito, l'infinitesimale e la natura del continuo, Bonaventura Cavalieri sviluppò il metodo degli indivisibili nel *Geometria indivisibilibus continuorum quadam ratione promota* pubblicato nel 1635.

L'opera non contiene alcuna definizione degli indivisibili, ma Cavalieri considera una figura

Figura 2: *Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647)*

piana come l'insieme delle sue linee, un solido come composto di un numero "*indefinito*" di sezioni parallele. Cavalieri dice in modo poetico che una linea è formata da punti come una collana è formata di perle, che una superficie è formata di linee come un tessuto di fili e che si può immaginare un solido come un libro chiuso composto da un'infinità di pagine parallele tra di loro. Senza analizzare qui le difficoltà incontrate da Cavalieri nel fatto di dover sommare un'infinità di elementi, il metodo è un bel esempio, a mio avviso, di come un matematico sa guardare diversamente lo stesso oggetto. Questo approccio dei matematici potrebbe farci dire che la "*la matematica è l'arte di farsi sorprendere*"...

Tuttavia, nell'approccio che presenterò qui di seguito, il fatto di ritornare sullo sviluppo delle capacità di osservazione potrebbe sembrare per il lettore smaliziato sull'argomento una riflessione banale. E pertanto, secondo me, proprio i fatti lasciati da parte perché evidenti in molte considerazioni didattiche sono da riprendere seriamente in considerazione. A tal punto, che bisognerebbe completamente innovare l'insegnamento della matematica dando spazio a questo approccio.

Figura 3: *Paul Klee (1879 - 1940)*

È ben noto tuttavia che per accogliere delle idee nuove bisogna lasciar perdere gli schemi soliti, ritrovare una forma di "*innocenza intellettuale*". Provvisti delle conoscenze accumulate in anni d'osservazione e di studio, ho cercato allora di costruire un cammino che forse è sfuggito a tanti, sebbene fosse lì, sotto gli occhi di ciascuno di noi. È anche la capacità dell'adulto di credere un pò a frasi come quella del pittore Paul Klee : "*una linea non è altro che un punto che è andato a farsi una passeggiata*".

Ma veniamo ai due matematici che si sono dichiarati espressamente essere interessati allo sguardo. "*È possibile un'educazione al ""saper vedere" in matematica* ?" Così s'interrogava (B.U.M.I., Serie 3, Vol. 22, 1967) Emma Castelnuovo cinquant'anni fa circa. Emma rifletteva sulle domande poste in un celebre libro di Bruno de Finetti dal titolo "*Il "saper vedere" in matematica*" (Loescher Editore, Torino, 1967).

Figura 4: *Emma Castelnuovo (1913 - 2014)* e *Bruno de Finetti (1906 - 1985)*

Si tratta della domanda che si pone ogni professore di matematica : "*ma perché i miei allevi non vedono quello che vedo io ?* "

È una domanda che può essere posta all'allievo con irritazione, talvolta accompagnata pure da commenti sgradevoli da parte dell'insegnante generando complessi e idee negative sulla matematica.

Io stesso mi sono sorpreso a formularmela, raramente a rivolgerla al mio interlocutore, per una forma di pudore, per paura di offenderlo ; talvolta ce la poniamo anche tra colleghi "*perché il mio collega non vede quello che vedo io ?* "...

Senza conoscere gli interessantissimi lavori di Emma Castelnuovo e Bruno de Finetti, tanti anni fa ho cominciato la ricerca di cui è questione in quest'articolo, ponendomi regolarmente delle domande che attraversavano il mio spirito fin da quando ero giovane : "*perché il mio modo di vedere un oggetto, una persona, un quadro, di analizzare un romanzo, una poesia oppure una situazione della vita quotidiana non era lo stesso che quello di un giovane della mia stessa età o di un adulto ?* "

Si tratta di domande semplici ma che tuttavia possono risvegliare la curiosità, non solo perché rivelano la differenza dei modi di vedere tra essere umani ma anche perché sollevano la questione - importante per chiunque, in particolare per gli insegnanti - della costruzione delle conoscenze degli uni e degli altri. Spesso per comunicare, per capirsi, è importante conoscere i riferimenti dell'altro. La costruzione delle conoscenze avviene in contesti talmente diversi : nella solitudine della propria stanza, in famiglia, in società e naturalmente a scuola.

La scuola, a livelli diversi, come scrivevo sopra, non ha fatto altro che amplificare le mie domande sui modi diversi di guardare, in quanto i professori, in particolare quelli di matematica, dicevano spesso in modo categorico : "*è così, si vede !* "

Ma perché, talvolta, diciamo anche spesso, io non vedevo ciò che il professore voleva che io vedessi ?

Passando gli anni, queste problematiche sono diventate quasi delle ossessioni... mi dicevo che ci doveva essere dietro qualcosa queste angosce ; poi si sono trasformate in una ricerca che dura da almeno vent'anni... durante i quali mi sono posto le stesse domande di Emma Castelnuovo e Bruno de Finetti e ho cercato di portare una risposta agli interrogativi dei due matematici.

Piano piano mi son convinto che il "*non vedere, vedere diversamente, essere previdente, visionario*"... sono due facce distinte della stessa medaglia : da una parte, quella delle difficoltà a vedere e dall'altra parte quella della creatività !

"*Chi segue sempre gli altri, non passa mai davanti !*" e "*Chi segue sempre gli altri non passa mai davanti ; chi da solo non fa mai niente di buono, non può godere delle opere altrui !* dicevano rispettivamente Leonardo da Vinci e Michelangelo Buonarroti due grandi esperti dello sguardo. Chi l'abbia detto per primo, poco importa. La citazione del primo l'ho sentita dire al grande regista Luchino Visconti, quella del secondo l'ho letta nel libro "*Le vite de' più eccellenti pittori, scultori, e architettori*" di Giorgio Vasari (1550). Leonardo diceva anche : "*Guarda attentamente perché ciò che vedrai non sarà più quanto hai visto poco fa*".

Figura 5: *Leonardo da Vinci (1452 - 1512)* e *Michelangelo Buonarroti (1475 - 1564)*

E così, seguendo i consigli di Leonardo e Michelangelo, ho cercato in varie direzioni : quella per esempio della comprensione delle ragioni che potevano essere all'origine delle "*difficoltà*" nel vedere a quella della comprensione di quei "*momenti di grazia* " quando, talvolta inaspettatamente, tutto invece diventa più chiaro e allora, per la nostra gioia più profonda, siamo creativi e abbiamo tante idee.

In molte situazioni, diciamo matematiche per il momento, ho incontrato studenti che bloccavano davanti ostacoli sui quali potevo anch'io restare interdetto, e anche i miei colleghi. Darò degli esempi. Uno di questi ostacoli che mi è venuto in mente spesso durante le formazioni impartite a degli insegnanti è stato il concetto di " *numero* ". Mi è sempre parso di capire che questo concetto era considerato come " evidente ". Era la constatazione che dovevo fare quando cercavo di approfondirlo in formazione : mi sembrava sempre di fare un buco nell'acqua ! *Un numero ? Che c'è da dire su un numero ? Cinque ? È un'evidenza !* Eppure la domanda : " Cos'è un numero ? " mi sembrava e mi sembra tuttora non solo normale da porsi ma anche difficile quando si cerchi una risposta.

La questione del concetto di numero, la sua natura variabile (intera, frazionaria, decimale finita o infinita, irrazionale, algebrica, trascendente, immaginaria...) e le sue diverse rappresentazioni non lasciano alcun dubbio, a mio avviso, che questa è lungi dall'essere " evidente ".

" *Cos'è un numero ?* " Bertrand Russel, matematico, logico, filosofo, epistemologo, uomo politico, (premio Nobel di Letteratura nel 1950), nella sua " *Introduzione alla filosofia matematica* " ci ricorda che questa domanda si è sempre posta, forse anche prima della scoperta stessa della nozione di numero, ma la prima risposta corretta si trova nei "*Grundlagen der arithmetick* " di Gottlob Frege (1884).

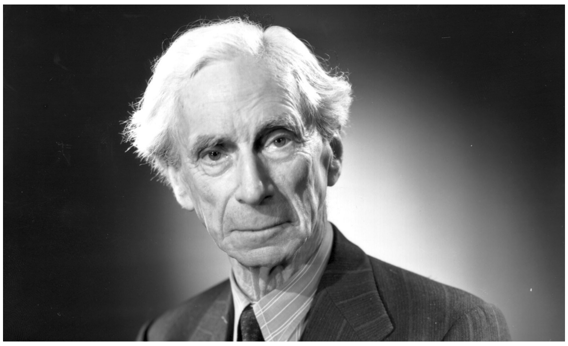
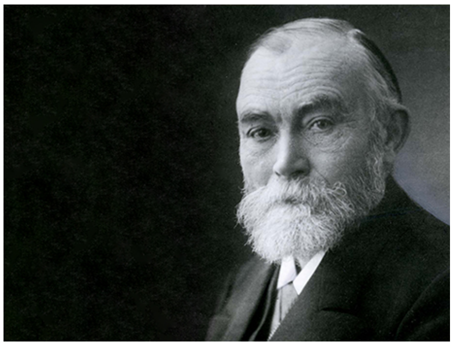
 

Figura 6: *Bertrand Russel (1872 - 1970)* e *Gottlob Frege (1848 - 1925)*

Qualche citazione del grande matematico inglese permetterà di cominciare a consolidare il pensiero qui di seguito esposto. Nell'opera citata sopra, Betrand Russell scrive : "*Devono infatti essere stati necessari molti secoli per scoprire che una coppia di fagiani ed un paio di giorni sono entrambi espressioni del numero 2; il grado di astrazione che questo comporta non è certo lieve. Come anche la scoperta che 1 è un numero deve essere stata difficile. Quanto allo 0, è una scoperta recentissima; i Greci ed i Romani non avevano questa cifra.*"

E un pò più in là : "*Una pluralità non è una espressione di un numero ma di un numero particolare. Un terzetto di uomini è un esempio del numero 3, ed il numero 3 è un esempio di numero ; ma il terzetto non è un esempio di numero. Questo punto può sembrare elementare e neppure degno di nota ; eppure, tranne poche eccezioni, è stato troppo sottile per i filosofi.*"

E ancora più in là : "*In realtà contare, anche se familiare, è logicamente un'operazione molto complessa; inoltre la si può utilizzare come mezzo per scoprire il numero dei termini di un insieme, solo quando l'insieme è finito. La nostra definizione di numero non deve presupporre che tutti i numeri siano finiti; né possiamo, in alcun caso, senza cadere in un circolo vizioso, usare l'operazione del contare per definire i numeri, dato che usiamo i numeri per contare.*"

Ciò rivela, a mio avviso, i limiti della nozione di "*evidenza*" invocata quando insegnando ci si imbatte in nozioni che non sono per nulla evidenti ma profondamente difficili come per esempio quella di numero.

Di un'altra natura, ma sempre in quest'ordine d'idee, è per esempio la nozione di "*triangolo qualunque*" invocata in quasi tutti i manuali scolastici e raramente discussa. Per anni, ho lanciato il dibattito in corsi universitari su cosa si poteva intendere per triangolo qualunque, trattando l'esercizio seguente per accompagnare il mio proposito : *sia BC un segmento assegnato, dove piazzare il punto A affinché il triangolo ABC non sia né isoscele né rettangolo ?*

È la questione dell'"oggetto generico" che è qui sollevata, tanto discussa in geometria, in particolare in geometria algebrica.

Fin dagli inizi di questa ricerca, la presenza di tante difficoltà, talvolta di carattere filosofico/epistemologico, mi ha incoraggiato a cominciare per creare una specie di *museo* nel quale i quadri sarebbero sostituiti da concetti matematici (nozioni varie come quella di numero, d'identità, d'isomorfismo...) e, soprattutto, da configurazioni geometriche, principalmente quelle ponevano problemi non solo a degli studenti molto bravi ma anche a dei professori d'università !

Ci si può legittimamente chiedere come condurre tali ricerche senza abbandonarle, dicendosi frettolosamente che non si è tanto bravi (e presuntuosi ?) per essere capaci di superare tutti gli ostacoli.

Ma voglio far notare subito un fatto curioso successo a Nizza durante la mia tesi di dottorato. Da un pò di giorni, un problema di geometria elementare mi torturava e non vedevo come avanzare. Andai allora in biblioteca a trovare uno dei geometri algebrici che, per così dire, all'epoca andava per la maggiore. Gli chiesi se potesse darmi un'idea per avanzare sul problema. Gentilmente mi rispose : "*Caro Valerio, chiedimi di calcolare una successione esatta di coomologia, ma non chiedermi, per favore, di risolvere un problema sui triangoli !* ".

Preciso che in quest'articolo saranno esclusi propositi di giudizio verso i membri della mia comunità matematica verso la quale nutro un profondo rispetto e attaccamento. Gli aneddoti citati serviranno soprattutto per appoggiare la tesi difesa nel testo a proposito dell'importanza dello sguardo e dell'analisi fatta, qua e là, della costruzione matematica nel seno di questa comunità e osservata a lungo, come studente, insegnante e come ricercatore. È una riflessione sull'intelligenza propria dell'uomo matematico e dell'intelligenza delle cose in generale. Eviterò di andare nel campo della fenomenologia e del lavoro del filosofo e matematico Edmund Husserl (1859 - 1938) verso il quale sono stato recentemente attratto. E il percorso fatto finora che vorrei descrivere qui, in attesa di un lavoro più ampio.

Questo percorso mi ha portato ad osservare la matematica e diciamo pure l'atteggiamento di fronte ad essa, dalla scuola materna fino all'università, fin nel lavoro dei ricercatori, osservando in modo particolare, più da vicino, ciò che succede alla scuola elementare e media. Numerosi esempi illustreranno il mio proposito.

Figura 7: *Foto archivi scuola elementare* e *A. Grothenieck all'Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette.*

2 Collegamenti - Un protocollo originale

Tengo innanzitutto a precisare taluni punti di metodologia che mi sembrano essenziali in questa ricerca :

- è importante disporre di molti esempi per i quali gli allievi, gli studenti, i colleghi hanno incontrato delle difficoltà per risolvere un problema dato (che sia di geometria, di algebra, d'analisi...) e altri esempi dove noi stessi abbiamo incontrato delle difficoltà ;

- è giudizioso preferire all'inizio delle configurazioni geometriche ove non bisogna ricorrere a delle costruzioni ausiliari ed altre invece per le quali le costruzioni ausiliari s'impongono ;

- è estremamente utile condurre un'indagine per ciascun esempio, al fine di compilare una lista, anche se approssimativa, delle difficoltà incontrate nel *vedere*.

L'idea è di proporre dei laboratori *arte e matematica* (che ho chiamato *corsi legati*) nei quali gli allievi e i professori eserciteranno lo sguardo e libereranno la parola ; il voto sarà sostituito, se necessario, da un auto-valutazione. L'allievo apprenderà fin da piccolo il senso dell'espressione *essere esigenti rispetto a se stessi*.

Bisognerà poi scegliere un campo per così dire "*fuori* " da quello della matematica e "*andare a vedere*" ciò che che succede "*altrove*."

È bene precisare fin da ora che lo scopo non è quello di cercare la matematica nelle opere d'arte ; non si tratta qui di vedere se in un quadro c'è un punto di fuga o una linea d'orizzonte. Uno degli scopi principali è quello di imparare ad aguzzare lo sguardo.

È un pò, come dire ?, imparare a sviluppare "*l'occhio di lince*" , come il personaggio mitologico di Linceo che diede il nome all'animale. Nel racconto degli Argonauti si dice che fosse uno dei personaggi dotato di una vista così notevole da... attraversare i muri !

Non si tratta beninteso di raggiungere una tale capacità nell'educazione allo sguardo, ma piuttosto di sviluppare l'arte di vedere quei dettagli che sono là, sotto i nostri occhi o... "*accanto*", per capire meglio un problema, decifrare bene una configurazione geometrica, "*far parlare* " una formula e via dicendo e aiutare i nostri allievi a fare altrettanto.

Personalmente, ho scelto per le mie ricerche come campo d'investigazione parallelo alla matematica quello della pittura classica e ciò per due ragioni : la prima perché mi piace disegnare (e osservare i particolari di ciò che disegno), la seconda è perché mi sono convinto che la pittura è un campo per eccellenza per riflettere sui dettagli presenti in un'opera, ma non solo.

Nell'analisi di un quadro è necessario mobilizzare tutte le proprie conoscenze come la storia dell'arte, la storia (epoca, avvenimenti storici), la storia delle religioni, la geografia (luoghi), la mitologia (miti fondatori)...

Gli elementi presenti come i personaggi, gli animali, gli oggetti, i vestiti, le decorazioni... servono a riconoscere immediatamente e direttamente l'immagine.

L'analisi dello spazio rappresentato, dei colori, della luce, del materiale utilizzato, la consistenza, gli strumenti d'esecuzione utilizzati, le tecniche, lo stile... contribuiscono alla comprensione dell'opera (quadro, scultura...).

Un quadro, come una scultura, è un campo dove porsi domande del tipo : a cosa mi fa pensare ? che messaggio è trasmesso da quest'opera ?

È un ottimo esercizio per imparare a fare delle associazioni ; e la matematica potrebbe anche definirsi come "*l'arte di fare i legami*".

Avrei potuto scegliere come altri campi d'investigazione paralleli a quello della matematica quelli della scultura, della fotografia, del cinema, della letteratura... Qualche esperienza è stata fatta, qui dove risiedo, nel Nord della Francia, con la scultura e la fotografia.

Nel campo della pittura, per me meno conosciuto che quello della matematica, è stato importante formarmi su dei libri. Quali ? Due si sono imposti quasi subito , il terzo mi è stato segnalato da Francis Trincaretto, presidente dell'associazione La Cité des Géométries di Maubeuge (Hauts-de-France, Francia).

I primi due sono dello stesso autore, Daniel Arasse, storico dell'arte e specialista del Rinascimento. Si tratta di "*On y voit rien*" (Edizioni Folio - 2000) e "*Histoires de peintures* " (Edizioni Folio 2004). Il terzo libro sul quale ho lavorato è "*Histoire d'oeils* " (Edizioni Grasset, 2016) dello storico Philippe Costamagna, specialista del Pontormo e della pittura italiana del XVIê secolo nonché direttore del museo delle Belle Arti di Ajaccio. I libri citati sono tutti tradotti in italiano.

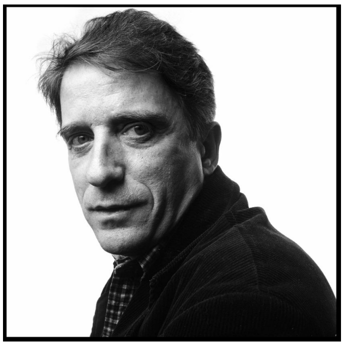



Figura 8: *Daniel Arasse (1944 - 2003)* e *Philippe Costamagna (1959 -)*

I tre libri permettono di conoscere meglio lo sguardo dello storico dell'arte, i tempi d'osservazione dello storico dell'arte, i dubbi, i ripetuti ritorni di questo sulla stessa opera d'arte, le emozioni che può provare lui stesso davanti un capolavoro e il desiderio di trasmettere la gioia provata, sia durante la fase di contemplazione sia durante quella delle scoperte di dettagli che hanno permesso di attribuire una tela a questo o quell'altro autore.

Per diversi anni ho condotto delle esperienze principalmente all'università, nei miei corsi universitari.

Quattro anni fa, mi è stato proposto di condurre un progetto triennale grazie al sostegno di strutture come il Rectorat (una sorta di maxi provveditorato presente in ogni Académie francese) e l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) di Lille, un progetto di tipo SEPIA acronimo per Soutien à l'Expérimentation et à l'Innovation dans l'Académie. Un gruppo di ricerca è stato creato in seno alla Scuola Media "*Nina Simone* " di Lille in collaborazione con l'Ispezione di Lille-Centro e il Palais des Beaux-Arts di Lille.

Il gruppo costituito da insegnanti di scuola elementare e della scuola media citata ha lavorato sull'educazione allo guardo in arte (pittura e scultura) e matematica.

Durante il primo anno della sperimentazione, 2017-2018, io stesso ho formato gli insegnanti alla lettura di qualche opera d'arte. L'attenzione si è portata in particolare sulle opere del pittore francese Jean-François Millet (1814 - 1875) perché il Palais des Beaux-Arts(dal 13 ottobre 2017 al 22 gennaio 2018) di Lille organizzava un'esposizione sulle opere dell'artista.

La presenza di una specialista in storia dell'arte si è presto fatta sentire. Ed è per questo che **Marie-José Parisseaux**, esperta in pedagogia e storica dell'arte, ha raggiunto il gruppo agli inizi del 2018 e mi ha affiancato nella pratica dell'educazione allo sguardo. Le conoscenze delle opere esposte al Palais des Beaux-Arts di Lille e le capacità di Marie-José a comunicare con gli allievi hanno dunque facilitato la creazione di un protocollo molto particolare, innovatore e originale, e in armonia con gli obiettivi prefissi, cioè di migliorare l'insegnamento della matematica, renderlo più piacevole coinvolgendo maggiormente tutti, allievi e professori.

Per quanto mi riguarda mi sono potuto notevolmente nutrire dello sguardo della storica dell'arte non soltanto rispetto alle opere analizzate ma anche per il modo di scambiare denso e interattivo con gli allievi. Gli scambi trai i giovani e Marie-José facevano eco su quanto leggevo nei libri degli storici dell'arte, e cioè di questa loro capacità fine di analizzare le opere osservate, di prendere il tempo necessario, cosa che è abbastanza poco praticata in matematica dove è meglio vedere, leggere un enunciato e agire velocemente.

Il protocollo di questo progetto sperimentale consiste dunque a condurre le classi, una per volta, al Palais des Beaux-Arts di Lille (diverse scuole hanno beneficiato di questo protocollo).

In un primo tempo, gli allievi sono condotti davanti un'opera d'arte, un quadro oppure una scultura. Il protocollo così chiamato può allora cominciare. I giovani osservano innanzitutto l'opera per qualche minuto, in silenzio ; ciò permette di creare un'atmosfera propizia alla riflessione, alla concentrazione e all'osservazione. In una serie di interviste filmate che ho condotto, quattordici matematici differenti tra loro, la maggior parte di fama internazionale, tra cui una medaglia Fields e una medaglia d'oro del CNRS, sottolineano l'importanza della concentrazione come uno dei cardini principali per condurre al meglio il loro lavoro.

Nel campo letterario, la giovane scrittrice franco-magrebina Leïla Slimani (1981 -), premio Goncourt nel 2016 (l'analogo del premio Strega), nel libro "*Le diable est dans les détails, suivi de Comment j'écris*", parlando del suo lavoro di scrittrice insiste sull'importanza della concentrazione.

Gli allievi esprimono in seguito ciò che l'opera d'arte suggerisce loro. In che modo ? Utilizzando le conoscenze personali in campi diversi come la storia dell'arte, la storia, la storia delle religioni, la geografia, la mitologia senza dimenticare di convocare il loro spirito d'osservazione, il buon senso, i loro riferimenti culturali attuali e, eventualmente, i legami con l'epoca attuale.

La storica dell'arte accoglie o rettifica le risposte in funzione della loro giustezza, sempre rispettando la libertà dei parola degli uni e degli altri, con spirito critico ma senza mai giudicarli.

Le opere osservate sono state scelte in precedenza dal loro professore, eventualmente in relazione con un progetto pedagogico di quest'ultimo. Il professore è invitato a studiare da solo l'opera. Il Palais des Beaux-Arts, come molti musei, offre gratuitamente delle schede pedagogiche per aiutare il pubblico. L'idea forte è che, nell'avvenire, il professore sappia presentare da solo l'opera d'arte insieme al problema di matematica e condurre il dibattito con gli allievi.

La seduta termina con la lettura del cartello accanto all'opera e un riassunto di Marie-José Parisseaux che raggruppa tutte le diverse osservazioni degli allievi che ripartono così valorizzati, contenti di aver partecipato attivamente all'interpretazione del quadro o della scultura. In effetti, lasciano il luogo dopo aver eseguito uno schizzo del quadro o della scultura, scegliendo tra il disegnare l'opera intera oppure un dettaglio sul quale sia andata la loro attenzione.

Gli allievi sono in seguito invitati a seguirci alla biblioteca del Palais des Beaux-Arts dove il loro professore propone di riflettere su una situazione matematica (configurazione geometrica, problema di aritmetica...) scelta insieme all'universitario presente. Si tratta il più delle volte di una configurazione geometrica.

Davanti alla configurazione geometrica gli allievi possono esprimersi liberamente come precedentemente, davanti al quadro o alla scultura. Possono dire tutto ciò che gli passa per la mente ; ogni risposta è accolta, discussa, accettata o rifiutata se questa è priva di senso, utilizzando le conoscenze frutto dei corsi di matematica e in relazione a ciò che hanno davanti ai loro occhi. Quest'ultimo punto pur sembrando ovvio è estremamente importante. Perché ? Perché in tanti anni di insegnamento ho potuto constatare che le risposte degli studenti non sono tanto in relazione a quanto hanno sotto gli occhi ma soprattutto tese a fornire una risposta all'insegnante, risposta che talvolta non ha alcuna relazione con l'oggetto studiato. Vedremo un esempio al paragrafo 3.3. In altri termini, c'è un'assenza dello sguardo sull'oggetto in questione. Riportando lo sguardo su questo, non sempre, ma tante volte, mi è successo di far trovare allo studente la risposta giusta. Questa poteva anche non venire rivelando allora una mancanza di conoscenze sull'argomento.

Ultimo aspetto, non trascurabile a mio avviso, gli allievi sono invitati a dare un *nome alla configurazione*. Ciò potrebbe sembrare un dettaglio banale ma in realtà è non solo un ulteriore esercizio di fantasia ma anche un modo per personalizzare le configurazioni studiate. Un quadro, una scultura, un film... hanno un cartello o un titolo per individuare l'opera ; perché non dare un nome a una situazione matematica ? Inoltre, il nome di un quadro evoca tante cose e non richiama soltanto il quadro in questione.

In conclusione, le due attività, quella legate all'opera d'arte e alla configurazione matematica, sono così concatenate in un'unica attività : quella del lavoro intellettuale.

Figura 9: *Alunni davanti un'opera* e *alla Biblioteca del Palais des Beaux-Arts di Lille (Francia)*

Questo legame permette anche di riconoscere che la matematica è complessa tanto quanto le altre discipline ! Da sempre, credo, la matematica è stata messa su un piedistallo. Ciò ha tuttavia contribuito ad aumentare le paure verso la disciplina, a rinforzare la distanza tra allievi e professori e a creare l'immagine di un apprendimento per così dire irraggiungibile. A nulla è servito, almeno in Francia, ad alleggerire i programmi; le paure restano e il fossato tra allievi e professori sembra oramai sempre più incolmabile ! La ricerca portata avanti, malgrado questa folla di dubbi, ha permesso di credere che una svolta a centottanta gradi è ancora possibile e, aggiungerei, auspicabile.

Come è stato già detto, durante le due sedute gli allievi non ricevono un voto. Talvolta hanno manifestato anche un disagio ad interrompere le sedute di matematica alla biblioteca del museo affermando apertamente la volontà di continuare a cercare e a tracciare le figure alla riga e al compasso.

L'assenza di valutazione, di giudizio, ha trovato dunque eco favorevole non soltanto tra gli allievi ma anche tra i professori. È ben noto che il voto in Francia ha un ruolo primordiale, dalla scuola materna fino all'università, nella relazione alle conoscenze. Senza voler squalificare il voto, questo tuttavia non deve essere o diventare lo scopo principale della conoscenza. Sarà banale scriverlo ma è bene ripeterlo, soprattutto che in Francia la matematica è stata usata come mezzo di selezione, contribuendo più a rinforzare gli spauracchi verso la disciplina che ad apprezzarla !

Gli allievi mostrano di essere a loro agio malgrado lo sforzo richiesto nelle due attività ; dopo diversi ritorni al museo rivelano una più grande maturità di pensiero rispetto alle prime volte, un interesse a proseguire le due attività senza mai accusare segni di fatica. Finiscono per realizzare che le due attività, parlare di un'opera d'arte o esprimersi su una configurazione geometrica, sono entrambi delle esperienze complesse e che le due fanno parte di uno stesso esercizio dell'intelletto. Ci sono naturalmente delle analogie e delle differenze. Ritornerò su questi aspetti.

I professori, almeno quelli che hanno accettato di giocare il gioco fino in fondo, hanno progredito in modo spettacolare : commentano l'opera d'arte senza bisogno d'aiuto, gestiscono in modo formidabile le prese di parola degli allievi e mostrano una grande familiarità con il protocollo nelle due attività.

Per migliorare ancora di più questo protocollo, ci si è resi conto che il passaggio all'attività scritta poteva apportare questo contributo. La traccia scritta, cioè le note che permettono di fissare su carta l'attività svolta, è fondamentale in ogni campo di ricerca: per ritornarci, per porsi altre domande, per approfondire, per permettere a ciascuno di cercare altre piste.

Ed è stato così, in modo direi naturale che un professore di francese, **Patrice Gaches**, ha raggiunto il gruppo di lavoro e, quando gli era possibile, ha partecipato alle sedute al Palais des Beaux-Arts. In un primo tempo, il suo ruolo si è limitato a chiedere agli allievi di scrivere le loro impressioni sui quadri o le sculture studiate.

Talvolta, gli alunni hanno visto delle figure geometriche nei quadri : dei triangoli, delle diagonali, dei cerchi... Abbiamo ascoltato con attenzione queste risposte perché accettabili, anche se lo scopo non è, sottolineiamolo ancora una volta, cercare la matematica suggerita dai quadri.

Abbiamo soprattutto chiesto ciò che vedevano nei quadri e come interpretavano l'opera.

La grande difficoltà è stata allora quella di trascrivere l'esperienza vissuta. Mentre il racconto orale poteva essere spesso estremamente interessante, quello scritto si è rivelato di una grande povertà. Ed è anche questa capacità di riportare in modo fine l'esperienza vissuta che sarà parte integrante dell'educazione allo sguardo.

3 Lo sguardo in matematica - Esempi

3.1 Configurazione geometrica senza costruzioni ausiliari

In questa prima parte del paragrafo darò essenzialmente qualche esempio di configurazione geometrica **senza** costruzioni ausiliari. Lo sguardo sarà sufficiente per risolvere i problemi proposti.

Che sia detto ancora una volta chiaramente : la conoscenza di un corso è essenziale per accompagnare " l'educazione allo sguardo ". Vediamo subito un bel esempio.

Esempio 1. Quadro geometrico di Vecten, 1817 : *Un incontro inatteso*

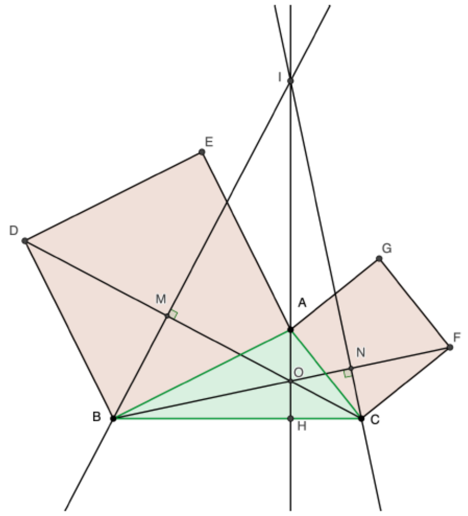


Figura 10: *Un incontro inatteso*

Quello che ho chiamato *Un incontro inatteso* è un problema conosciuto dal 1817 e posto dal Vecten, professore di Mathématiques spéciales al liceo imperiale di Nîmes e collega del più celebre Joseph Diez Gergonne (a cui è legato il nome degli *Annales de Gergonne* più conosciuti come *Annales de Mathématiques pures et appliquées* dove Évariste Galois pubblicò il suo primo articolo).

Sui due lati AB et BC d'un triangolo qualunque ABC, si costruiscano due quadrati $ABDE$ e $ACFG$; si costruiscano poi i segmenti DC, BF e EG.

(**a.**) Dimostrare che le due perpendicolari a DC e BF uscenti da B e C rispettivamente si incontrano (l'incontro inatteso !) in un punto I appartenente al prolungamento dell'altezza AH relativa al lato BC del triangolo ABC.

(**b.**) Dimostrare che le rette (DC) e (BF) si incontrano sulla retta (AH)

(**c.**) Dimostrare che la perpendicolare d'origine A del segmento EG è una mediana del triangolo ABC

Commenti. Questo problema è un esempio di esercizio che ha messo in difficoltà, qualche anno fa, non soltanto gli allievi di uno dei migliori licei parigini, il Lycée Louis le Grand, ma anche professori d'università. Trovando la costruzione bella e il problema interessante, ho accettato la sfida di una collega di cercare la soluzione soprattutto alle domande (**a.**) et (**c.**) che mi sembravano le più difficili, la (**b.**) essendo di facile soluzione, benché lo sguardo giochi anche in questa domanda un ruolo importante.

Agli inizi, preso da un'impazienza frenetica ho tentato diverse costruzioni ausiliari convinto che ne avessi bisogno. I miei fogli erano diventati illeggibili per via delle tracce di una febbre tipica dell'esaltazione di chi vuole trovare. Una sera, più calmo, mi sono deciso a ritornare alla configurazione iniziale, a non far nulla..., soltanto a guardarla, braccia incrociate, per un quarto d'ora circa.

La soluzione allora " *si è sollevata dal foglio* " ed è venuta verso di me. Ero felice.

Ciò che vorrei rilevare è non soltanto l'importanza dell'osservazione fine ma è anche il ruolo che ha l'osservazione nei matematici, pertanto capaci di far compiere salti notevoli alla ricerca fondamentale ma bloccati completamente davanti un problema di liceo e talvolta anche di scuola media (darò degli esempi).

Perché sarebbe più facile calcolare delle successioni esatte di coomologia che risolvere un problema sui triangoli ?

Il che solleva diverse domande: i ricercatori non vedono perché un problema di geometria elementare in fondo interessa meno che un problema di ricerca fondamentale ? Lo sguardo è una questione di familiarità con i problemi ? Perché non prendere allora più seriamente il problema delle difficoltà degli allievi quando anche i professori stessi bloccano ?

Al di là della semplice provocazione nelle domande precedenti, c'è un'altra che mi è sorta durante queste ricerche : ciò che potremmo chiamare l'intelligenza delle cose è organizzata per strati differenziati ? Ci sarebbe forse un'intelligenza del calcolo delle successioni esatte e un'altra legata ai triangoli o agli studi di funzioni o ai giochi matematici come ce ne sarebbe una musicale, un'altra linguistica etc (teoria delle intelligenze multiple di Howard Gardner) ?

L'esperienza e l'aneddoto raccontato sopra quando ero studente a Nizza sembrerebbero rispondere affermativamente a quest'ultima domanda. Il grande matematico e fisico John Von Neumann avrebbe detto : "*In matematica, le cose non si capiscono, ci si abitua* " : è un allusione all'educazione allo sguardo (e alla pratica di operazioni intellettuali più o meno vicine ?) o altro ?

Esempio 2. Sia ABC un triangolo. Consideriamo il cerchio inscritto al triangolo ABC, di cui supponiamo conoscere le misure dei tre lati : a, b, c.

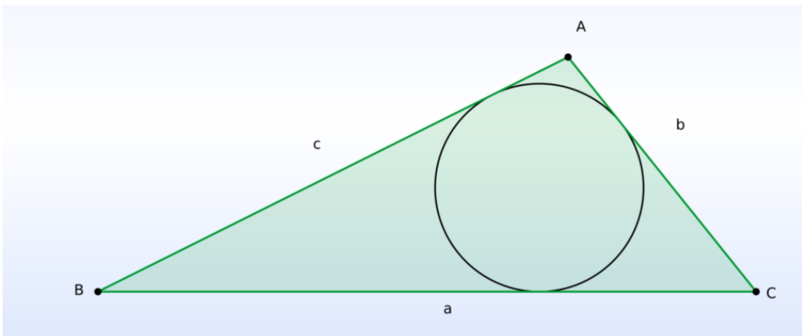


Figura 11: *Cerchio inscritto nel triangolo ABC*

Consideriamo una tangente al cerchio inscritto in un punto T, scelto arbitrariamente su questo cerchio e siano M et N le intersezioni di questa tangente con i lati AB e BC rispettivamente. Qual'è il perimetro del triangolo BNM ?

Commenti. Nessuno studente del terzo anno di matematica (2017/2018) dell'università di Lille fu capace di trovare la strada per arrivare alla soluzione del problema posto

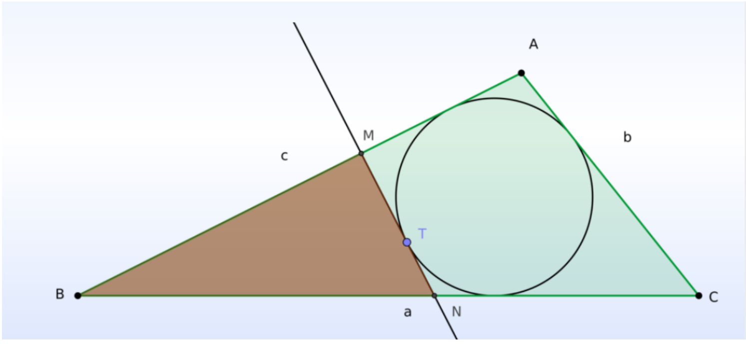


Figura 12: *Il triangolo BMN*

dall'insegnante. Quest'ultimo, scuotendo la testa, mi chiedeva, si chiedeva : "*In questo esercizio c'era poco da fare ma gli studenti non hanno visto niente : perché ?* ".

E pertanto, dopo aver constatato visualmente la presenza delle tangenti al cerchio nei punti A, C, N, M...

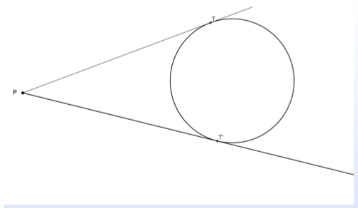


Figura 13: *Proprietà delle tangenti a un cerchio*

e, ricordandosi la ben nota proprietà che $PT = PT'$, avrebbero potuto concludere.

3.2 Situazioni con costruzioni ausiliari

In questa seconda parte del paragrafo darò essenzialmente qualche esempio di configurazione geometrica dove sono necessarie le cosiddette **costruzioni ausiliari**.

In questi casi, il livello di profondità dello sguardo "*sale*". In questi casi, oltre lo sguardo e le conoscenze, è necessario aver praticato la ricerca, sviluppato un grande spirito d'iniziativa e una confidenza in sé notevole. Ecco, qui di seguito, qualche esempio, non sempre facile da trattare.

Esempio 1. Euclide : dimostrare che la somma degli angoli interni in un triangolo è un angolo piatto.

Commenti. Storicamente, penso che si tratti tra i primi enunciati dove lo sguardo e il pensiero sono in azione ! Questo teorema fu un messaggio che, forse inconsciamente, mi fece riflettere sullo sguardo fin dal liceo.

Esempio 2. "*La rosa di Sophie*". Si tratta del problema seguente. Sia dato un triangolo equilatero ABC ; supponiamo che esista un punto P interno al triangolo tale che $PA = 3, PB = 4$ et $PC = 5$. Qual'è l'area del triangolo ABC ?

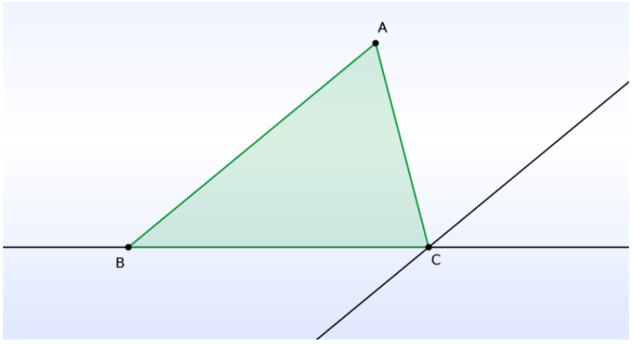


Figura 14: *La somma degli angoli interni ad un triangolo*

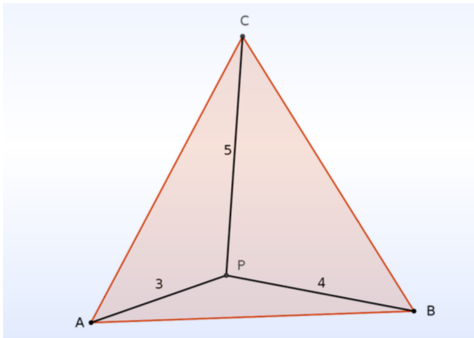


Figura 15: *La rosa di Sophie...*

Commenti. Si tratta del primo esempio di un problema dato ai miei studenti dicendo loro che avevo avuto un'idea ma senza riuscire ad avanzare. Questa consisteva a considerare i simmetrici del punto P rispetto ai lati.

Poi, c'era stato come un vuoto siderale nella mia testa, vuoto di cui ancora oggi ne ignoro le ragioni. Eppure ero ad un passo dalla soluzione. Mi decisi allora ad esporre alla classe (dei futuri professori, al secondo anno di magistrale) le mie difficoltà. Volevo così dare un esempio concreto del fatto che un professore non sa o non vede tutto !

Sophie, una studentessa del mio corso, ritornò una settimana dopo con la soluzione, qui lasciata in esercizio.

Le " **costruzioni ausiliari**" intervengono anche in algebra e in analisi e, anche in questi campi, prendere il tempo di osservare, come fanno gli storici dell'arte davanti un'opera essenziale, farebbe compiere salti di maturità agli allievi e agli insegnanti stessi. In algebra si **aggiunge e si toglie**. Qualche esempio darà consistenza a quanto veniamo di scrivere.

Esempio 3. Il primo esempio è ben conosciuto. Consideriamo il polinomio :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ ,$$

come trasformare la somma del secondo membro in prodotto ? Gli insegnanti sanno bene che basta... "aggiungere zero " e " moltiplicare per 1": meravigliosa algebra !

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}]$.

Si pone poi $\Delta = b^2 - 4ac$ per arrivare così ad un bel prodotto notevole :

$f(x) = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]$.

Questo procedimento, forse non più esibito a scuola, mostra insieme l'eleganza e l'efficienza dell'algebra.

La parola araba al-djabr significa "riduzione di una frattura ", "riunione di più pezzi ", " ricostruzione ", " restauro ".

Benché sviluppatasi per dei calcoli d'eredità, per degli scopi commerciali etc., l'algebra diventò l'arte di trasformare un'equazione per addizione di un termine. Naturalmente, bisognò aspettare l'introduzione del termine " equazione " e il passaggio alla scrittura moderna con l'utilizzazione delle quattro operazioni e degli esponenti, dei numeri negativi... per snellire la scrittura delle " equazioni " algebriche di ogni grado e impadronirsi delle abilità di calcolo che a mio avviso fanno parte della creatività matematica e dello sguardo assorti insieme.

Esempio 4. Aggiungere e togliere, moltiplicare e dividere : quattro operazioni diventate ai giorni nostri " evidenti " ma che ogni insegnante sa come sia difficile trasmettere agli studenti l'abilità di utilizzarle. Perché ? Talvolta invece gli studenti ci riservano gradevoli sorprese visive, come quest'anno, quando uno studente, non particolarmente bravo, davanti l'equazione:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

seppe scrivere $x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x-2) - 5(x-2) = (x-2)(x-5)$ e concludere ! Mistero !

Come i nostri studenti, come noi stessi professori di matematica guardiamo gli oggetti del nostro studio, è davvero un campo sterminato e appassionante dal punta di vista della ricerca.

3.3 Incidente

Contrariamente allo studente citato sopra, il cui sguardo fu decisivo per risolvere l'equazione algebrica data, un altro studente, al secondo anno di magistrale di matematica, mi lasciò letteralmente senza fiato.

Il problema che gli diedi fu il seguente : trovare tutte le soluzioni reali x dell'equazione

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Dopo una rapida occhiata, la risposta fu quasi immediata : "*basta porre* $y = \sin x$*, dunque* $y' = \cos x$*, sostituire, ottenendo così l'equazione differenziale lineare* $y + y' = 1$*. Si risolve l'equazione differenziale e il problema è risolto !*

Quest'ultimo esempio conferma che non siamo uguali davanti un oggetto matematico.

3.4 Scultura

Un passo da parte può aiutare a capire diversamente le difficoltà incontrate nel guardare.

Per esercitare l'attività dello sguardo, ma soprattutto per piacere personale e rilassarmi, da qualche anno seguo dei corsi di scultura presso una professoressa e artista, Jocelyne. Le sedute durano dal venerdì alla domenica mattina. Bisogna riprodurre una modella in una posizione particolare posta su una tavola ruotante. Quest'ultima gira ogni cinque minuti ritornando ogni ora sulla posizione iniziale.

Recentemente, seguivo uno degli stage di Jocelyne ed ho assistito ad uno scambio vivace tra Jocelyne e Didier, un nuovo allievo, la quarantina, alla sua prima scultura.

Non vedevano la stessa cosa; Jocelyne vedeva una piega della pelle e Didier vedeva un'altra cosa. Ad un certo punto ho temuto anche la nascita di un conflitto perché le due posizioni erano totalmente diverse e che Didier lasciasse il corso talmente era convinto di ciò che diceva. Avevo l'impressione di essere tornato a scuola.

Anche se sono convinto che Jocelyne (altezza : 1,57 m) avesse ragione, perché è un'eccellente pedagoga e artista, Didier (altezza : 1,94 m !) aveva senza dubbio le sue ragioni di veder qualche altra cosa.

Jocelyne insisteva per aggiungere terra da una parte e toglierne da un'altra sulla scultura di Didier. " L'algebra della scultura " : aggiungere e togliere quantità di terra guardando bene dove si vuole arrivare ; il procedimento mi ricordava tanto l'algebra della matematica; le difficoltà di Didier quelle di un nostro allievo.

Jocelyne citava spesso il grande scultore Auguste Rodin che ci ha lasciato delle belle lezioni sullo sguardo. A chi gli chiedeva da dove venisse tanto talento, Rodin rispondeva tranquillamente: "*mi limito a riprodurre quello che vedo.*"

Esempio 5. Un altro esempio più classico tratto dall'analisi è una delle dimostrazioni dell'unicità del limite di una successione. Una successione convergente

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

non può ammettere due limiti diversi. Perché ? Supponiamo, per assurdo, che la successione $\{a_n\}$ ammetta due limiti diversi l et λ. Dalla definizione di limite e dalle proprietà dei limiti, le due disuguaglianze sarebbero verificate definitivamente :

$$\mid a_n - l \mid < \epsilon, \quad \mid a_n - \lambda \mid < \epsilon.$$

Ma allora si avrebbe anche :

$$\mid l - \lambda \mid \leqslant \mid a_n - l \mid + \mid a_n - \lambda \mid < \ 2\epsilon,$$

donde, per via dell'arbitrarietà di ϵ, e dunque di 2ϵ, si avrebbe pure $\mid l - \lambda \mid = 0$, cioè $l = \lambda$.

Eleganza dell'analisi...

Nel libro *Calcul infinitésimal* (1971) del grande matematico Jean Dieudonné (1906 - 1992) si può leggere : "*Per acquisire il " senso dell'Analisi" fino alle speculazioni più astratte, bisogna aver appreso a distinguere ciò che è " grande " da ciò che è " piccolo", ciò che è " preponderante" da ciò che è " trascurabile". In altri termini il Calcolo infinitesimale, come si presenta in questo libro, è l'apprendimento di come si maneggiano le disuguaglianze più che le uguaglianze, e si potrebbe riassumere in tre parole : maggiorare, minorare, approssimare".*

Nel testo di Dieudonné è sottinteso il fatto che maggiorare è bene, ma perdendo il meno informazione possibile !

Maggiorare o minorare diventano dunque un'arte senza dubbio legate allo sguardo di ciò che si ha sotto gli occhi, arricchendo così l'arte di aggiungere, sottrarre, moltiplicare e dividere già incontrate nell'algebra.

3.5 Secondo incidente

Le nozioni di valore assoluto e disuguaglianza entrano magnificamente in gioco con tutte le *sviste* possibili, come quelle riscontrate presso molti studenti universitari del primo anno e del tipo :

$$\mid x+1 \mid = x+1, \ \textit{se } x>0$$

ciò che fa pensare che le due scritture $\mid x \mid = x, \ \textit{se } x>0$ e la precedente non siano state poi osservate così bene...

L'analisi della configurazione e la celebre disuguaglianza triangolare, possono venire in aiuto alla geometria, come nell'esercizio seguente, semplice, ma che richiede ancora una volta l'aiuto dello sguardo.

3.6 Per fortuna... che si vede !

Sia ABC un triangolo qualunque e M un punto interno :

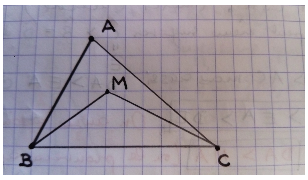


Figura 16: *Questione di perimetri*

Dimostrare que il perimetro di BMC è inferiore al perimetro di ABC.

È curioso osservare in questo caso come molti studenti, ma anche qualche professore, mi hanno risposto : " *è chiaro, è così, si vede !*". Sono i casi in cui rispondo che " *per fortuna... che si vede !* ". Ma come si dimostra ? Ecco, questo è un punto ben noto in cui constatare che un fatto *si vede* non sostituirà una dimostrazione ma ci incoraggerà a cercarla per provare quanto osservato. Se tuttavia si vede dalle ipotesi e dal disegno che la somma di due *angoli adiacenti* è un angolo retto non chiederò, tranne se non ce n'è veramente bisogno, di dimostrare che si tratta di due angoli *complementari*. Distinguere il rigore dalla pignoleria che renderebbe la matematica noiosa è molto importante nello svolgimento dei nostri corsi.

4 Cosa vedo ? Gli esempi in arte

Ritorno ancora una volta su un punto fondamentale : non cerchiamo la matematica nei quadri. Questo approccio è già conosciuto quando si vogliano trovare i punti di fuga, le linee d'orizzonte o il famoso numero aureo...

Non si tratta di ciò. Precisiamo tuttavia che lo studio della prospettiva ovvero la presenza di altre regolarità matematiche hanno senza dubbio il loro interesse.

Questi aspetti hanno permesso un notevole sviluppo della matematica durante e dopo il Rinascimento, grazie ai lavori di Piero della Francesca, Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci, Leon Battista Alberti e via dicendo.

Bisogna dire qui che questo periodo mi ha enormemente influenzato perché, aldilà dei soliti elogi sulla creatività tipica di quest'epoca, occorre ricordare che allora un pittore poteva essere architetto, matematico, filosofo... In altri termini, nel passato un'artista era più che un'artista ! È stato il caso degli artisti citati, in particolare di Leonardo. Quest'ultimo ha passato una gran parte della sua vita ad osservare e ad affinare lo sguardo. Ricordavamo più sopra quanto Leonardo avrebbe detto : "*Guarda attentamente perché ciò che vedrai non è più ciò che hai visto*".

Queste duplici attività d'artista e scienziato vissute da Leonardo durante la sua vita mi hanno sempre fatto pensare che poteva essere interessante abbattere le barriere esistenti tra discipline, offrendo la possibilità agli allievi di navigare tra mondi paralleli. Questo va e vieni ravvicinato tra discipline diverse permette di assaporare percorsi tuttavia vicini. Ciò è stato uno degli obbiettivi prefissi in questo progetto SEPIA, ciò è auspicabile qualora un collega volesse appropriarsi di un tale protocollo.

Detto questo, osservare che nel quadro *La Descente de Croix* di Paul Peter Rubens esposto al Palais des Beaux-Arts di Lille si trovano tre teste, vertici di un triangolo equilatero, oppure che la scena principale si trova nella parte inferiore del quadro sotto una delle due diagonali del quadro, pur non essendo il punto essenziale, può far parte delle osservazioni degli allievi, a prendere certamente come buone osservazioni.

Figura 17: *La Descente de Croix - Paul Peter Rubens (1612 - 1614)*

Ciò che importa in questo contesto è invitare gli allievi a descrivere minuziosamente ciò che vedono. La prima domanda posta è dunque : "Cosa vedo ?". Se si tratta di una scena, come nel caso del quadro di Rubens, si tratterà dunque di descriverla, di dare il senso alla torsione di un viso, di capire la presenza di un personaggio, eventualmente più importante di altri, d'osservare gli oggetti, i vestiti, i colori e le sfumature di questi, la decorazione, la composizione, l'organizzazione dello spazio, la luce... È questo uno degli aspetti dell'educazione dello sguardo. Un quadro può raccontare una storia complicata e gli allievi, come degli investigatori, sono invitati a far luce su questa storia.

La storica dell'arte aiuta gli allievi a fornire un'interpretazione possibile del quadro, propone gli elementi che mancano alla cultura degli studenti e mostra loro che un quadro, piccolo o grande che sia, porta in se stesso una quantità enorme d'informazioni per aiutare il pubblico a comprenderne il senso. Gli storici dell'arte possono passare una vita per comprendere questo senso e talvolta sono capaci, osservando il quadro per molto tempo, di cambiare idea oppure di offrirne una originale.

È chiaro che in un'ora non è facile trovare, descrivere e apprezzare gli elementi plastici intrinsechi all'opera e la loro qualità : spazio, forma, colore, luce, materia e consistenza di questa, strumenti utilizzati, tecniche, stile. E pertanto, nella maggior parte delle sedute, Marie-José Parisseaux è riuscita ad abbordare, seppure brevemente, tutti questi aspetti.

La lettura del cartello fatta da un allievo volontario chiudeva la seduta davanti al quadro prima di passare all'esecuzione di uno schizzo.

La lettura del cartello si è rivelata utile per ritornare sulla vita del pittore, il senso del titolo dato all'opera e i legami ulteriori con la storia dell'umanità, la mitologia... Insomma, le poche linee del cartello erano l'occasione per aprire pagine e pagine di cultura.

La mia attenzione si è rivolta verso un quadro : "Bélisaire demandant l'aumône" de Jacques-Louis David (1780), poi, ho lavorato su altri quadri come quelli di Eugène Delacroix, de Peter Paul Rubens, de Nicolas Mignard e, più recentemente, su Jean-François Millet, Luc-Olivier Merson e Francisco Goya, e sulle sculture di Denis Foyatier, Théophile Bra (esposte al Palais des Beaux-Arts di Lille) e su alcune di Auguste Rodin (a Parigi).

Uno dei primi quadri scelto per il nostro studio è stato dunque *Bélisaire demandant l'aumône* di Jacques-Louis David (1748 - 1825), uno dei quadri più importanti esposti al Palais des Beaux-Arts di Lille.

Figura 18: *Bélisaire demandant l'aumône - J.-L. David (1780)*

Il 24 agosto 1781, all'età di 33 anni, Jacques-Louis David entra all'Académie dopo che questa aveva accettato il suo *Bélisaire demandant l'aumône*, diciassette anni dopo gli inizi della sua carriera. David, cosciente della sua bravura, desiderava tanto diventare *pensionnaire* all'Académie Française di pittura a Roma. Come tema da trattare, gli era stato affidato quello dell'*eroe decaduto*. Sembrerebbe che David abbia trovato l'ispirazione per il personaggio di Belisario (500 - 565), generale agli ordini di Giustiniano primo, nel celebre romanzo di Jean-François Marmontel (1723 - 1799).

Il quadro è interessante, non solo per la storia di Belisario, generale brillante, ma anche perché gli elementi che saltano agli occhi sono subito : lo sguardo di Belisario e il suo casco ornato molto di più di quello del soldato, quest'ultimo in atteggiamento sorpreso (ci si chiede ancora: perché ?), Belisario, probabilmente cieco, ridotto a chiedere l'elemosina per strada, aiutato da un bambino, vicino delle colonne (Costantinopoli ?) e su uno sfondo che pone ancora domande (Costantinopoli ? Roma ?).

È un quadro che consiglio non solo per la sua bellezza ma anche perché permette in modo relativamente facile di instaurare uno scambio di idee con ragazzi e adulti.

Lo studio delle sculture "*a tutto tondo*" era l'occasione per lavorare sull'aspetto tridimensionale delle forme. Gli allievi giravano più volte attorno all'opera per appropriarsi nel modo migliore del lavoro dell'artista. Girare attorno ad una scultura osservandolo è già un lavoro intellettuale !

Figura 19: *Ulysse di T. Bra e Spartacus di D. Foyatier*

Tutto ciò è fondamentale per dare una visione globale di un'opera d'arte ma anche per mostrare agli allievi che la matematica non è l'unica disciplina che richiede una grande capacità a fare dei legami, a utilizzare la visione, la memoria e le conoscenze. Va da sé che si potrebbero dire le stesse cose dello studio della lingua italiana, delle lingue in generale, della storia, della geografia, dello sport...

In altri termini, il protocollo, ed è questo uno dei punti chiave, permette di scrollarsi un pò di dosso l'idea che la matematica sia l'unica disciplina da considerare (giustamente) come difficile ; tutte le altre discipline insegnate a scuola sono altrettanto difficili !

Questa "discesa dal piedistallo" della matematica e il ritrovarsi allo stesso livello che la storia dell'arte permette anche di far passare l'idea che chiunque può, certamente con qualche sacrificio, abbordare la matematica e trarne delle soddisfazioni. Alla fine, diciamolo chiaramente, la matematica non è più difficile, restando benintesi ad un livello " normale ", non troppo creativo, che le altre discipline e che i "gradi di nobiltà" sono identici !

5 Il piacere di... pensare

Tra i vari obiettivi di questo dispositivo sperimentale, c'è dunque quello di rendere la matematica più gradevole per un numero sempre maggiore di allievi e installare il piacere (non un peso sgradevole !) di pensare. Seguendo questo protocollo, abbiamo osservato che i migliori studenti sono meno "visibili". Ciò può sembrare poco credibile ma è quanto abbiamo potuto constatare durante le sedute al Palais des Beaux-Arts di Lille. La presa di parola essendo stata resa più facile, un numero più elevato di allievi si esprime.

In ogni caso, ciascuno degli adulti presenti fa continuamente attenzione a distribuire equamente la parola agli uni e agli altri.

Io e la mia équipe abbiamo lavorato attorno a diversi quadri, talvolta andando al museo con gli allievi due volte a settimana. L'obiettivo era quello di presentare le nostre ricerche al convegno internazionale **Éduquer le regard: croisements entre art et mathématiques** previsto a Lille il 3 e il 4 juin 2020, poi spostato in febbraio 2021 e riportato ancora in febbraio 2022 per via della crisi sanitaria mondiale.

Questo convegno sarà il seguito di quello tenuto a Roma, nel maggio 2018, **Educare lo sguardo : intrecci tra arte e matematica**[1].

Nel convegno di Roma, i gruppi del professor Enrico Rogora che hanno riflettuto sull'educazione allo sguardo hanno presentato i loro lavori e i risultati incoraggianti di questo approccio nell'insegnamento della matematica e dell'accoglienza favorevole da parte degli studenti.

Il professor Aziz El Kacimi dell'università di Valenciennes fece una conferenza sullo sguardo geometrico e la bellezza matematica.

Sul suo sito personale si troverà l'articolo *Le regard géométrique et un peu plus* dov'è raccontata la scoperta di un feuilletage che cercava da tanti anni per risolvere un problema di matematica restato aperto. Lo sguardo giocò un ruolo importante in questa scoperta raccontata con gusto grazie al talento di narratore di Aziz.

Qui di seguito ci accontenteremo di citare alcuni dei quadri e delle sculture studiate in occasioni delle sedute in Francia al Palais des Beaux-Arts di Lille : *Fortuna* (Alfred Agache), *Les Vieilles* (Goya), *Médée furieuse* (E. Delacroix), *Le Dénombrement de Bethléem* (Pieter Brughel l'Ancien), *Narcisse* (Ernest-Eugène Hiolle), *Cupidon* (J. A. M. Idrac), *Le concert dans l'oeuf (J. Bosch)*, *Le Repas chez Simon*, *L'enlèvement d'Europe* (J. Jordaens), *Femmes au bord du Nil* (E. Bernard), *La descente de Croix* (P. P. Rubens), *L'ascension des élus ou le Paradis terrestre* et *La chute des damnés ou l'Enfer* (D. Bouts), *Prométhée enchaîné* (P.P. Rubens).

Figura 20: *L'enlèvement d'Europe, J. Jordaens (1643)*

[1] www.barberinicorsini.org/evento/educare-lo-sguardo-intrecci-tra-arte-e-matematica/

Figura 21: *Narcisse, Ernest-Eugène Hiolle (1868)*

Figura 22: *Le Dénombrement de Bethléem, Pieter Brughel l'Ancien (1610 - 1620)*

Questa lista, anche se limitata, è già degna di considerazione in quanto si tratta di capolavori la cui interpretazione è complessa ; ciò non ha scoraggiato gli allievi che hanno saputo reagire con vivacità davanti ciascuna opera.

Nel progetto più ampio, abbiamo previsto di procedere allo studio di altri quadri e sculture, comprese quelle in epoche più recenti e lavorare su artisti come Poussin, Picasso, Rodin, Leger, Giacometti, Kandinsky...

Vorrei soffermarmi su di un esempio dove degli allievi di prima media hanno mostrato una grande reattività : due quadri di Bouts esposti al museo di Lille.

Figura 23: *L'ascension des élus ou le Paradis terrestre* e *La chute des damnés ou l'Enfer, D. Bouts (1470 circa)*

Durante la lettura dei quadri Bouts è sorta la questione dell'eternità, di un tempo di una durata infinita, per via della presenza del fuoco eterno. Questi temi hanno offerto l'occasione, in uno dei corsi legati, di parlare dell'infinito in matematica. È stato il momento di constatare l'importanza dei benefici del protocollo in quanto, degli allievi di prima media (!), completamente a loro agio nella discussione, hanno evocato i concetti seguenti : la retta, il numero π, l'infinito come simbolo (una specie di otto coricato, dicevano), una semiretta, l'infinità dei punti del cerchio, il numero periodico 3,33333...

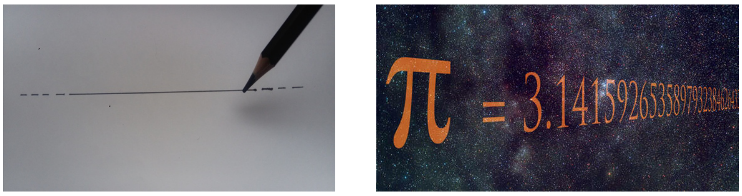


Figura 24: *Linea retta - Il numero* π

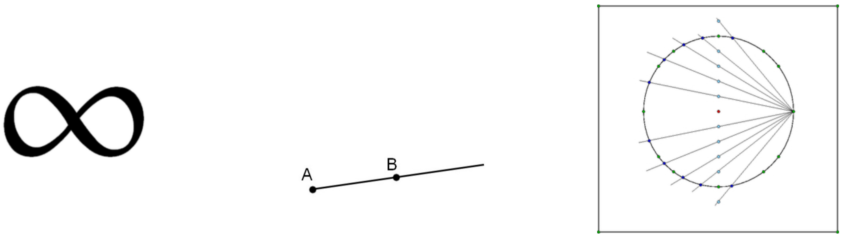


Figura 25: *Il simbolo dell'infinito John Wallis (1655) - Una semiretta - Contare i punti di un cerchio*

Ciò che è straordinario, secondo i professori, è che queste risposte degli allievi arrivano più facilmente in questo contesto particolare, dove la matematica e l'arte sono presentate alla stessa stregua. Pensare diventa un piacere.

6 Miscellanea

In questo paragrafo, discorrerò brevemente di aspetti matematici legati allo sguardo, nello scopo sempre di rinforzare quest'idea che uno degli aspetti interessanti e difficili insieme della matematica sono proprio le sfaccettature di questa e dei suoi oggetti. È il piacere di pensare come è stato scritto nel paragrafo precedente.

Come una pietra preziosa, ogni singolo oggetto matematico (un oggetto, una struttura, un teorema...) può essere guardato sotto tanti angoli. Ed è questa ricchezza di approcci della matematica che fa sì che sia difficile insegnarla. In fondo, gli oggetti matematici sono un pò come certi quadri, per esempio la *Gioconda* di Leonardo, sulla quale ogni punto di vista ha generato uno scritto sull'interpretazione del quadro.

Si potrebbe dire che ogni oggetto matematico è come della materia viva capace di adattarsi a situazioni molto diverse a tal punto che ci si potrebbe chiedere se la matematica è la scienza del calcolo o scienza delle forme...

6.1 Configurazione di Pappo

Possiamo dimostrare in modo rigoroso il teorema di Pitagora, ma senza circondarlo delle attenzioni necessarie, al di là della dimostrazione, anzi delle dimostrazioni (qualche centinaio...), perderemmo la profondità di questo teorema e il sapore di tute le sue innumerevoli conseguenze : scoperta degli irrazionali, quindi dell'infinito non numerabile, la nozione di distanza, di prodotto scalare, il legame con gli spazi topologici e - ritorno al passato - il teorema di Pappo !

Sia ABC un triangolo qualunque. Sul lato AB costruiamo il parallelogramma $AFGB$ e sul lato BC il parallelogramma $BEDC$ in modo tale che le semirette $(FG$ e $(DE$, di origine F et D rispettivamente, si incontrino in in un punto H. Sul lato AC si costruisca infine il parallelogramma $ACNM$ tale che $AM = HB$. Si ha allora che l'area del parallelogramma $ACNM$ est uguale alla somma delle aree del parallelogramma $AFGB$ e del parallelogramma $BEDC$.

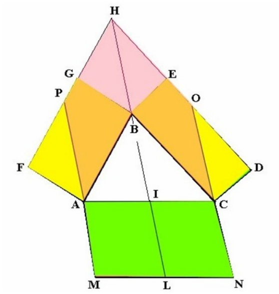


Figura 26: *Configurazione di Pappo, Collezioni Matematiche (∼ 320)*

6.2 Calcolo mentale

Alla scuola elementare, una volta apprese le proprietà delle quattro operazioni, si può utilizzare in modo proficuo lo sguardo applicando queste proprietà, per esempio nel caso del calcolo mentale.

Si debba eseguire
$$18 \times 19.$$

In questo caso, può essere utile " guardare" 19 come $20-1$ per effettuare più facilmente il calcolo. Le difficoltà legate a queste tipo d'operazioni mostrano l'importanza di discutere l'infinita di rappresentazioni che può avere un numero, di cui la maggior parte inutili in un contesto particolare.

6.3 Una somma celebre

Un esempio celebre.

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 =?$$

Tutti i professori di matematica conoscono il famoso aneddoto a proposito del grande matematico Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). All'età di dieci anni, il suo maestro chiese agli alunni di calcolare la somma di tutti i numeri da 1 a 100. Gauss avrebbe risolto il problema in pochi minuti scrivendo la somma di sopra in due modi diversi e, sommando membro a membro, sarebbe arrivato al risultato finale come spiegato qui sotto :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\
S & = & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
 & & & & & & & & & & \\
2S & = & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101
\end{array}
$$

$$2S = 100 \times 101 \Longrightarrow S = 50 \times 101 = 5050.$$

Questo aneddoto illustra anche il concetto di *libertà* sottinteso nella pratica matematica ; la libertà di fare diversamente per raggiungere lo scopo prefisso.

6.4 Un prodotto notevole

Supponiamo voler trasformare in prodotto la differenza seguente :

$$169x^2 - 25.$$

Ogni professore sa che conviene scrivere $169x^2$ come 13^2x^2 e quest'ultimo prodotto come $(13x)^2$ e concludere nel modo seguente

$$169x^2 - 25 = (13x)^2 - 5^2.$$

Per un allievo, le due scritture $169x^2 = (13x)^2$ e $25 = 5^2$ non sono così ovvie. Non che, una volta mostrate, siano incomprensibili ma il punto è come trovarle per fare in seguito il legame con il prodotto **notevole**

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Confesso di non aver avuto molto successo quando proponevo ai professori di scuola elementare l'esercizio seguente : scrivere 25 in dieci modi diversi. Malgrado le mie motivazioni non ne vedevano l'utilità. Eppure questo semplice esercizio da una parte apre lo spirito di un allievo sull'infinità dei modi (sentirà o capirà da solo oppure con l'aiuto dell'insegnante che non ce ne solo dieci di modi diversi ...) in cui un numero qualunque può essere scritto e dall'altra fa riflettere che tra le infinite scritture di un numero ce ne sarà una più utile delle infinite altre perché crea legame con proprietà già studiate.

Abbiamo già visto l'interesse di moltiplicare per 1 in certi casi o aggiungere zero in altri.

6.5 Relazioni di equivalenza e funzioni

L'esercizio seguente può sollecitare un altro tipo di sguardo. Dimostrare che la relazione

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

è una relazione di equivalenza e precisare, per ogni numero reale x, il numero di elementi della classe di x modulo $\mathcal{R}$.

Qui può essere interessante studiare l'andamento della funzione $\dfrac{x}{e^x}$.

6.6 Uno ugale due mezzi

Comme trovare la primitiva di

$$\int \frac{1}{\sin x} dx \ ?$$

I passaggi seguenti forniscono un metodo per trovarla e, ben che di natura quasi misteriosa, meritano di essere " guardati "

Sappiamo che $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Dunque ($1 = \frac{2}{2}$):

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

donde :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} dx + \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} dx.$$

In conclusione :

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = -\ln \mid \cos\frac{x}{2} \mid + \ln \mid \sin\frac{x}{2} \mid + c = \ln \mid \tan\frac{x}{2} \mid + c.$$

6.7 Cambiamento di variabili

Il calcolo della primitiva precedente permette di parlare di una tecnica, quella del "*cambiamento di variabili* ", tema per eccellenza in cui allenare lo sguardo al liceo e all'università.

Questa tecnica è propizia perché spesso... basta guardare !

Sia da calcolare l'integrale $I = \int \sin x \cos x dx$. Basta osservare che ponendo $u = \sin x$, si ha $du = \cos x dx$ donde $I = \int \sin x \cos x dx = \int u du$ ainsi $I = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$.

Tuttavia, le cose non sono sempre così semplici. Talvolta guardare non basta e scambiare i propri dubbi con un collega può essere utile per uscire fuori da una situazione apparentemente bloccata.

6.8 Buon senso... ma non solo !

Ecco un esempio, fra tanti, sul quale meditare. Sia da calcolare l'integrale :

$$I = \int \frac{x + \cos x}{1 - \sin x} dx.$$

C'è già un effetto *trompe-l'œil*, in quanto la derivata di $x + \cos x$ è... $1 - \sin x$. Purtroppo $1 - \sin x$ è a denominatore, il che non ci fa tanto avanzare verso il buon cambiamento di variabile. Ci potrebbe essere, il che non è male, un effetto *buon senso* : separare la x dal resto... nel modo seguente :

$$I = \int \frac{x + \cos x}{1 - \sin x} dx = \int \frac{x}{1 - \sin x} + \int \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

Come avanzare poi ? Lo sguardo "ci dice" che la x potrebbe ad un certo punto "sparire". Come ? Attraverso un'integrazione per parti, ponendo $u = x, u' = 1, v' = \frac{1}{1-\sin x}$ e (sguardo !)

$$v = \int \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$$

primitiva quest'ultima che si calcola facilmente scrivendo :

$$\frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

onde

$$v = \tan x + \frac{1}{\cos x}.$$

La regola d'integrazione per parti ci suggerisce allora di scrivere :

$$I = x(\tan x + \frac{1}{\cos x}) - \int (\tan x + \frac{1}{\cos x}) dx + \int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx.$$

Arrivato a questo punto, il mio sguardo si è bloccato, e ho dovuto parlarne al mio collega François Recher che mi ha "semplicemente" fatto osservare che

$$-(\tan x + \frac{1}{\cos x}) + \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

era uguale a... zero ! Calcolare per credere. Quindi, in definitiva, si ottiene :

$$I = x\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right) + c.$$

Questo esercizio è a mio avviso estremamente istruttivo perché fa intervenire non solo lo sguardo ma varie competenze che si mischiano a questo.

6.9 Intermezzo: fulmine matematico !

Lo sguardo cambia visibilmente da un matematico all'altro. Ecco un esempio dove mi è piacevole esaltare la capacità fulminea di certi matematici geniali e relativizza il discorso della capacità a vedere anche ai più alti livelli.

In un intervista filmata (*Paroles des déchiffreurs* a cui facevo allusione sopra), uno dei quattordici matematici intervistati, Jean-Pierre Bourguignon, l'allora direttore dell' Institut des Hautes Études Scientifiques mi raccontava (2011) l'aneddoto seguente.

"*Ero a Bonn, in Germania, per un soggiorno di un anno. Un giorno, ricevo una lettera entusiasta del mio direttore di tesi, Marcel Berger, in quanto internet non esisteva ancora. Mi scriveva che aveva risolto la congettura di Blaschke precisando che il calcolo decisivo per risolverla era di calcolare un integrale. Berger conclude : " so calcolarlo, dunque ho il risultato cercato". A mezzogiorno vado a pranzare con Don Zagier, in quel momento presente a Bonn. Al ristorante, su un tovagliolo di carta, gli enuncio il problema del calcolo di quest'integrale cercato da cinquanta matematici sparsi nel mondo e per circa vent'anni. Zagier non aveva mai sentito parlare di questo problema. E là, sul tovagliolo di carta, Zagier trova tre cambiamenti di variabili, tutti assolutamente diabolici, che davano* *la risposta al problema posto. In un minuto, Zagier aveva fatto il lavoro che Berger e tanti altri, compreso me stesso, non avevano saputo fare per anni. È un esempio di " folgore " e Don Zagier è un matematico folgorante !*"

Quest'aneddoto ci può aiutare a riflettere sulla nozione di " declinazione " della nozione di sguardo. Ci si potrebbe dire che è ben noto che Don Zagier è senza dubbio un grandissimo matematico, ma il futuro direttore dell'IHES e, all'epoca, soprattutto Marcel Berger, erano matematici di spicco. Si può restare bloccati su un problema di matematica a diversi livelli di conoscenza, anche eccezionali, e per un lungo periodo. L'aneddoto, come tanti altri analoghi, mostra la tenacità, l'umiltà e l'intelligenza che richiede la nostra disciplina. Personalmente, lo prendo come un esempio da conservare preziosamente come insegnante.

6.10 Abeliano ma non solo

L'algebra, di nuovo, soprattutto al livello universitario, è un campo dove lo sguardo di uno studente può smarrirsi perché il giovane si trova spiazzato, comme nell'esercizio seguente.

Sia $(G, \star)$ un gruppo munito dell'operazione $\star$.

Dimostrare che G è abeliano se e soltanto se

$$f : x \in G \longmapsto x \star x \in G$$

è un endomorfismo.

Qui, si è in presenza di due nozioni apparentemente "lontane", quella di prodotto, per cui si cerca a dimostrarne la commutatività, e quella di morfismo di cui si cerca a provare che si tratta di un endomorfismo !

6.11 Immaginare i numeri complessi

Alla domanda in quanti modi abbiamo potuto guardare l'affascinante campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi nel corso dei propri studi si resta sorpresi, meravigliati, incantati.

Una semplice lista, certamente non completa, farà sentire al lettore questo aspetto diamantino della matematica e gli sguardi multipli che si possono avere su uno stesso oggetto.

a. Il campo $\mathbb{C}$ è spesso presentato come il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ delle coppie (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ numeri reali, quindi come l'insieme prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$ e le operazioni solite di addizione e moltiplicazione tra coppie definite su questo insieme.

b. Consideriamo il numero complesso $(0, 1)$ indicato con la lettera i e chiamato *unità immaginaria*. Grazie alle regole della moltiplicazione tra coppie risulta :

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$$

Via l'identificazione $(a, 0) = a$, ogni numero reale può essere *riguardato* come numero complesso e scrivere :

$$i^2 = -1 \text{ e } (a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$$

e, infine, per ogni numero complesso (a, b) si può scrivere:

$$(a, b) = a + ib$$

chiamata la *forma algebrica* del numero complesso (a, b). Si pone di solito $z = a + ib$. Il numero reale a è detto *la parte reale* di z e si indica col simbolo $\mathcal{R}ez$, il numero reale b è detto il *coefficiente dell'immaginario* di z e si indica col simbolo $\mathcal{I}mz$.

c. Consideriamo un piano $\mathcal{P}$ riferito ad un sistema di coordinate ortogonali. È noto che si può istituire una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano $\mathcal{P}$ facendo corrispondere al numero complesso $a + ib$ il punto del piano $\mathcal{P}$ che ha per coordinate cartesiane ortogonali a e b. Il piano $\mathcal{P}$ prende il nome di *piano complesso*. Questa è la *rappresentazione geometrica dei numeri complessi*.

d. Nel piano complesso $\mathcal{P}$ fissiamo un verso positivo delle rotazioni, quello antiorario come d'uso. Considerato un numero complesso $z = a+ib$ sia P la sua immagine sul piano $\mathcal{P}$; diciamo ρ il *modulo* di z (distanza tra P e O l'origine delle coordinate). Se $z \neq 0$, diciamo θ la misura in radianti dell'angolo (definito a meno di multipli di 2π) che porta nel verso positivo delle rotazioni l'asse reale positivo sul semiasse cui appartiene il vettore $\overrightarrow{OP}$; θ si chiama *l'anomalia* o *argomento di* z. Ad ogni numero complesso $z \neq 0$ restano associati infiniti argomenti; tra queste determinazioni se ne può certamente sceglierne una: diciamola θ tale che

$$-\pi < \theta < \pi$$

chiamata *l'argomento principale* di z. Si può allora vedere che possiamo scrivere :

$$a + ib = \rho(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Il secondo membro prende il nome di *forma trigonometrica* del numero complesso z.

e. C'è una *forma esponenziale* del numero complesso visto sopra :

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

f. C'è la forma polare di z :

$$z = (\rho, \theta).$$

g. Consideriamo il campo delle matrici $\mathcal{M}_C$:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

con a, b numeri reali e le solite operazioni di addizione e moltiplicazione tra matrici. Si può far vedere che questo campo è isomorfo a $\mathbb{C}$ e contiene un sottocampo $\mathcal{M}_R$ delle matrici :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

che si può identificare a $\mathbb{R}$. È noto pure che le matrici del campo $\mathcal{M}_C$ possono interpretarsi a loro volta come le matrici delle *similitudini dirette* :

$$\begin{cases} \text{x' = ax - by} \\ \text{y' = bx + ay} \end{cases}$$

h. Il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ può ancora essere visto come il quoziente seguente :

$$\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$$

dove $\mathbb{R}[x]$ è l'anello dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{R}$ et (x^2+1) è l'ideale massimato associato al polinomio irriducibile x^2+1.

Queste diverse forme dei numeri complessi ovvero del campo $\mathbb{C}$, come le diverse presentazioni della derivata in Thurston (cf. paragrafo 7), lasciano riflettere come la matematica sia il dominio dello sguardo.

6.12 Il sogno di Cayley

Infine, nel campo della ricerca in geometria algebrica, farò riferimento a degli argomenti che ho incontrato quando ero impegnato in questo settore della matematica. Un matematico fu al centro delle delle mie attenzioni : Arthur Cayley, matematico originalissimo. Prima giurista, i suoi successi nelle ricerche in vari campi della matematica gli permisero di ottenere la cattedra di algebra all'università di Cambridge.

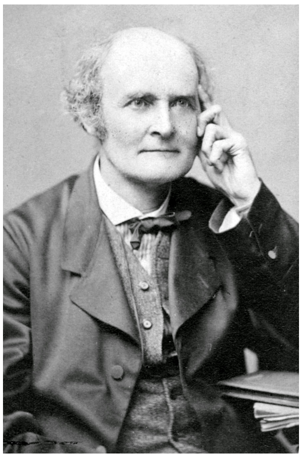


Figura 27: *Arthur Cayley (Richmond, Surrey, 1821 - Cambridge 1895) e King's College Chapel - Università di Cambridge*

Tra i vari interessi di Cayley, ci fu quello per la geometria, in particolare per la geometria numerativa. Questo campo della matematica è una parte della geometria algebrica e si occupa della determinazione a priori del numero delle soluzioni di un problema di carattere algebrico. I primi problemi di geometria numerativa hanno comunque carattere geometrico e possono essere rintracciati già nell'opera di Apollonio di Perge (circa 250 a.C.). Questi si interessò a tracciare nel piano un quarto cerchio tangente a tre cerchi dati. Si può dimostrare che il problema di Apollonio ammetterà in generale al massimo otto soluzioni.

Per una curva liscia C qualunque dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3$, di *grado* n e di *genere* g, il numero $q(C)$ delle rette *quadrisecanti* alla curva è dato da (Cayley, 1863) :

$$q(C) = -\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - \frac{1}{2}g(n^2-7n+13-g).$$

Molti geometri algebrici italiani si sono esercitati in questo campo. Qui ci limiteremo a citare Giuseppe Tanturri, Luigi Berzolari, Guido Castelnuovo e Francesco Severi.

Francesco Severi (1879 - 1961) aveva "dimostrato " che il numero $q(C)$ delle *coniche quadrisecanti* alla curva C, di grado n e con h *punti doppi apparenti*, e che incontrano quattro rette fisse era dato :

$$q(C) = 4\binom{h}{2} + h\left[14\binom{n}{2} - 22n + 33\right] - 4\binom{n}{4} - 3\binom{n}{3} - \binom{n}{2}.$$

Patrick le Barz, il mio direttore di tesi di dottorato, aveva supposto che i coefficienti binomiali avessero un'interpretazione geometrica. Le Barz aveva fatto questa ipotesi osservando che tutte le formule note della geometria numerativa e relative a fatti geometrici legati all'intersezione potevano esprimersi tramite coefficienti binomiali.

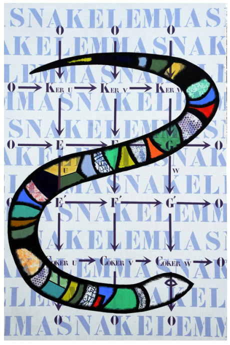


Figura 28: *Patrick le Barz, matematico e artista : una sua interpretazione del lemma del serpente*

Nel seguito, l'ipotesi si rivelò esatta, ciò che mi permise, via altri legami, di dimostrare il cosiddetto *metodo funzionale per le curve sghembe* introdotto dallo stesso Cayley.

Alexandre Grothendieck (1928 - 2014), medaglia Fields nel 1966 e premio Crawford nel 1988 (rifiutato !) è stato senza alcun dubbio uno dei più grandi matematici del ventesimo secolo. Aggiungerei ciò che qui importa : è stato uno dei rari ricercatori a interrogarsi, dopo Euclide, sulle nozioni di punto e di spazio. Voleva guardare queste nozioni a modo suo.

Grothendieck, come Einstein, furono autodidatti in materia di " educazione allo sguardo". Citerei semplicemente la conclusione dell'articolo di Luca Barbieri-Viale: " A. Grothendieck. Entusiasmo e creatività" (Lettera Matemlatica Pristem, Vol 50/51, Springer, 2007) :

"*In conclusione, Grothendieck come Einstein, attraverso una "mutazione della concezione che noi abbiamo dello spazio, in senso matematico da una parte e fisico dall'altra" e l'innovazione del nostro sguardo sul mondo mediante una visione unificatrice della matematica da una parte e della fisica dall'altra, s'impongono ai nostri occhi come il matematico e il fisico che hanno rivoluzionato il pensiero scientifico mediante il concetto di relatività.*"

Grothendieck aveva trovato la strada aperta grazie anche ai lavori degli algebristi italiani dei primi del novecento. Quest'apertura gli ha senza dubbio permesso di riformulare tante nozioni già note e introdurre delle nozioni comme quella di *schema di Hilbert* (qui si fa riferimento, soprattutto per gli specialisti, allo *schema di Hilbert puntuale*).

Francesco Severi (*Riflessioni intorno ai problemi numerativi concernenti le curve algebriche*, Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol.54, pagg.243 - 254, 1921) in particolare scriveva : *Consideriamo all'uopo la varietà irriducibile* ∞^8, T, *delle quaderne di punti allineati dello spazio e la varietà irriducibile* ∞^4, U, *delle quaderne di punti della generica curva* C. *Le* T, U, *sono contenute nella varietà irriducibile* ∞^{12}, Z, *di tutte le quaderne di punti dello spazio proiettivo.*

Leggendo bene tra le righe, si può riconoscere in questo passaggio la nascita degli schemi di Hilbert.

7 Il caso Thurston

William Paul Thurston, medaglia Fields nel 1982, è stato un matematico americano interessatosi a vari campi della matematica e senza dubbio uno dei più grandi matematici del ventesimo secolo.

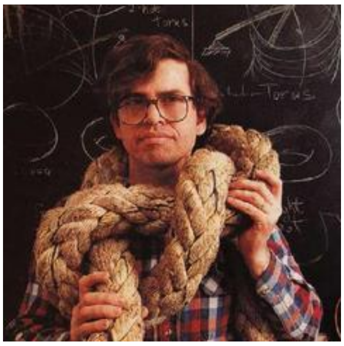


Figura 29: *William Paul Thurston (1946 - 2012)*

Come scrive Régine Douady (Repères IREM, n.21 - octobre 1995, pagine 7 - 26) a proposito di Thurston "*la sua preoccupazione non era soltanto quella di creare matematica, ma anche far avanzare la comprensione umana e condividerla con i suoi colleghi, lettori, uditori...* ". Un magnifico articolo di Thurston *On proofs and progress in mathematics*[2] (1994) è diventato conosciuto in Francia grazie alla sua traduzione e diffusione sulla rivista REPERES degli IREM. In questo articolo, non di facile lettura, soprattutto per i non matematici, ma estremamente istruttivo, Thurston spiega dal suo punto di vista il lavoro del matematico e si sofferma sulla natura della matematica. Ritornerò altrove su questo articolo di Thurston estremamente toccante di cui potrei citare molti passaggi che lascerebbero senza dubbio riflettere il lettore sensibile.

Nell'ambito del nostro tema, quello dello sguardo, è soprattutto utile citare Thurston quando dice che la gente ha modi molto diversi di capire la matematica e cita come esempio il concetto di *derivata di una funzione* per il quale gli studenti incontrano delle difficoltà.

Scrive Thurston : " *Si può pensare alla derivata come :*

[2] www.ams.org/journals/bull/1994-30-02/S0273-0979-1994-00502-6/S0273-0979-1994-00502-6.pdf

1. Infinitesimale : il rapport del cambiamento infinitesimale del valore della funzione sul cambiamento infinitesimale della variabile.

2. Simbolico : la derivata di x^n est nx^{n-1}, la derivata di $\sin(x)$ est $\cos(x)$, la derivata di $f \circ g$ est $f' \circ g \star g'$, etc

3. Logico : $f'(x) = d$ se e soltanto se, per ogni ϵ, esiste un δ tale che se

$$0 <\mid \Delta x \mid< \delta \ allora \ \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| \ < \ \epsilon.$$

4. Geometrico : la derivata è l'inclinazione della tangente al grafico, se il grafico ha una tangente in questo punto.

5. Tasso : La velocità istantanea $f(t)$, se t è il tempo.

6. Approssimazione : la derivata di una funzione è la migliore approssimazione lineare di questa funzione vicino ad un punto.

7. Microscopico : la derivata di una funzione è il limite di ciò che vedete al microscopio ingrandendo sempre di più. "

Le righe seguenti ci aprono gli occhi sul pensiero di Thurston

"*Piuttosto che una lista delle diverse* definizioni logiche, *questa è una lista dei diversi modi di* concepire *la derivata, di diversi modi di* pensarla. E aggiunge : "*Questa lista continua : non ci sono ragioni perché si esaurisca. Potremmo pensare, ad un certo punto, che noi sappiamo tutto ciò che c'è da dire su un argomento dato, ma delle nuove visioni delle cose ci aspettano dietro l'angolo. Inoltre, ciò che può essere un'immagine mentale chiara per una persona può essere sorgente d'intimidazione per un'altra :*

8. La derivata di una funzione f definita su un dominio D, a valori reali, è la sezione Lagrangiana del fibrato cotangente $T^{\star}(D)$ che da la forma di connessione per l'unica connessione piatta sul $\mathbb{R}$-fibrato banale $D \times \mathbb{R}$ per la quale il grafico di f è parallelo.

Mi ricordo d'aver assorbito ciascuno di questi concetti come qualcosa di nuovo e interessante, e d'aver speso molto tempo e tanti sforzi intellettuali per digerire, assimilare e utilizzare ciascuno di questi, e a riconciliarli gli uni con gli altri. Mi ricordo anche di essere ulteriormente ritornato su ciascuno di questi concetti diversi tra loro, con un significato e una comprensione migliori.

Queste differenze non sono soltanto una curiosità. Il pensiero umano e la comprensione non funzionano seguendo una sola strada, come un calcolatore con un'unica unità centrale. I nostri cervelli e i nostri spiriti sembrano organizzati in dispositivi funzionali relativamente separati, con capacità potenti e varie. Questi dispositivi lavorano insieme in un modo indipendente, "parlando" tra di loro a dei livelli alti piuttosto che a dei bassi livelli d'organizzazione.

Si ritorna dunque, grazie a Thurston, a riflettere non solo sui concetti matematici stessi ma anche sul modo in cui lo stesso concetto può essere assimilato in vari modi, come questi modi sono (o non sono !) archiviati nel cervello di ciascuno di noi e come avviene il "dialogo" tra di loro.

8 Ritorno su questo protocollo originale e limiti dello sguardo

In questo nuovo protocollo spiegato nei paragrafi precedenti e applicato durante le sperimentazioni, abbiamo fatto di tutto per suscitare un profondo interesse degli allievi non solo verso l'arte ma soprattutto verso la matematica. A questo scopo, ogni volta abbiamo chiesto di :

- proporre un titolo per la configurazione geometrica (come se fosse un quadro!) ;
- descrivere per iscritto la configurazione geometrica ;
- spiegare come prendersi per costruire la figura, cercando di essere il più precisi possibili, e, se necessario, di aggiungere delle lettere agli oggetti geometrici ;
- costruire la figura con la riga e il compasso e, eventualmente, colorare la figura.

L'idea del titolo si è rivelata divertente perché gli allievi si sentivano liberi di utilizzare la loro immaginazione e la loro fantasia. Marie-José Parisseaux ha utilizzato questi ingredienti davanti i quadri e le sculture. I giovani si sentivano valorizzati e partecipi dell'attività. Prima di leggere il cartello, gli allievi potevano proporre il loro titolo. In questo contesto, non abbiamo mai veramente osservato della noia. In generale, si sono quasi tutti prestati al gioco dall'inizio alla fine delle sedute. Ci è anche apparso che gli allievi ci tenessero a ripartire con una configurazione disegnata con la massima cura. Gli allievi che erano venuti più volte al museo mostravano nelle sedute successive una migliore maturità rispetto alle sedute precedenti.

Resta uno spazio più importante da dare alla lingua scritta, francese nel nostro caso, a Lille, e all'orale : come raccontare le due sedute (quella d'arte e quella di matematica) ad altri allievi che non conoscono quest'esperienza ?

Quest'ultimo punto è fondamentale. Gli allievi ripetendo ad altri allievi prendono coscienza della difficoltà ad insegnare. Ogni insegnante sa insegnare, e anche insegnare più volte lo stesso corso aiuta a fissare le conoscenze. Senza cadere in un elogio immoderato della ripetizione, questa sembra giocare un ruolo per sollecitare la memoria e a liberarla dagli ostacoli che impedirebbero al cervello di fare una delle cose più importanti in matematica : stabilire dei legami. L'osservazione prolungata delle opere d'arte e delle configurazione geometriche gioca anche questo ruolo di "fissatore " delle conoscenze.

9 Delle letture di storia dell'arte utili... per l'insegnamento della matematica !

In "*Histoires de peintures*", Daniel Arasse, storico dell'arte, parla del suo quadro preferito *La Madone Sixtine* di Raffaello esposto a Dresda.

Scrive : "*E poi, sono andato a Dresda, ho visto La Madone Sixtine e sono rimasto molto deluso perché stavano restaurando il museo : c'era un vetro davanti il quadro, e ciò che vedevo là dove ero seduto erano le luci del neon che si rifletteva sul vetro, dovevo muovermi per capire cosa c'era dietro. Ero molto deluso, ma come ero venuto fino a Dresda per vedere questo quadro, non volevo ripartire deluso. Allora, sono rimasto un'ora circa, a muovermi, e a un certo punto il quadro si è "sollevato ". E là, all'improvviso, ho visto La Madone Sixtine, e debbo dire che ho visto uno dei quadri intellettualmente più profondi*

Figura 30: *Madonna Sistina, Rafaello Sanzio (1512)*

della storia della pittura europea e, se si ama e si conosce Raffaello, uno dei quadri più commoventi. ".

In questo protocollo c'è stata dunque l'ispirazione proveniente dal Rinascimento ma non solo. Delle letture come già scritto hanno spianato la strada verso il protocollo. In particolare tre, di cui una, quella di Daniel Arasse, citata sopra.

Le altre due sono "*On n'y voit rien*",sempre di Daniel Arasse e "*Histoire d'œils*" di Philippe Costamagna, specialista della pittura italiana del sedicesimo secolo e direttore del musée des Beaux-Arts d'Ajaccio.

Figura 31: *Letture formative di storia dell'arte*

In ciascuno di questi libri possiamo apprezzare pienamente l'importanza data allo sguardo e all'educazione allo sguardo.

Non sono convinto, come insegnante e formatore in matematica, che formiamo sufficientemente gli "occhi matematici" dei nostri allievi, i nostri propri occhi. Si passa poco tempo as osservare e a far parlare le nostre figure, le nostre formule, i nostri teoremi.

Per quanto riguarda gli storici dell'arte, dalle mie letture in particolare il libro di Philippe Costamagna, mi sembra chiaro che gli storici dell'arte passano più tempo ad osservare i quadri. Ma, come precisa Philippe Costamagna, in fine tocca "*all'occhio d'entrar nell'opera* ". Un'educazione allo sguardo s'impone dunque un pò a tutti.

Un tempo d'osservazione si impone dunque per apprezzare un teorema, una definizione, una formula o una configurazione geometrica particolare. Saltando questa tappa, si perde a mio avviso il piacere offerto dalla matematica.

Per queste ragioni, sono convinto che abbiamo molta da apprendere dalla lettura di questi "œils" educati ad un'osservazione fine dei quadri.

È forse inutile ricordare che la parola "*teorema*" significa etimologicamente "*guardare, contemplare*" ?

Attraverso l'osservazione, durante le sedute al Palais des Beaux-Arts abbiamo potuto trasmettere anche l'idea di "bellezza matematica".

Penso in particolare al *teorema di Franck Morley (1898)* sulle trisettrici degli angoli in un triangolo la cui intersezione dà luogo a tre punti vertici di un triangolo equilatero !

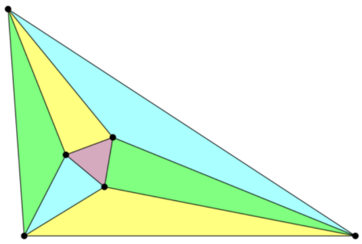


Figura 32: *Configurazione di Morley*

Guardando L'Annunciazione (verso1470) di Francesco del Cossa, Daniel Arasse è attirato dalla presenza di una lumaca. A questo proposito scrive : "*Ad un certo punto questo " enigma della lumaca" non mi mollava più ed ho finito per vederci come un richiamo del pittore verso il mio sguardo, come una domanda che poneva, sul bordo del quadro, a coloro che lo guardavano e che, per secoli, lo avrebbero guardato.*

Sapete di cosa si tratta : si riflette, si riflette, si resta bloccati e poi, all'improvviso, ecco !, si vede. Si vede ciò che era sotto gli occhi, ciò che non avevamo ancora visto mentre, giustamente, era proprio evidente. Un giorno, dunque, ciò che questo quadro mi mostrava silenziosamente, in primo piano, mi è saltato agli occhi : questa lumaca è enorme, gigantesca, mostruosa. Se non mi credete, non vi resta che paragonarla alla taglia del piede di Gabriele, che si trova anche lui in primo piano nel quadro. "

Figura 33: *L'Annunciazione, Francesco del Cossa*

Questa capacità dunque di fissare a lungo i quadri, in modo attivo beninteso, è ugualmente benefica nell'insegnamento della matematica.

Philippe Costamagna è cresciuto nella casa dei nonni materni sulle colline di Nizza.

In "Histoire d'œils" descrive dunque la nascita di questa qualità ad osservare bene : "*Questa famiglia non era una famiglia d'intellettuali, ma aveva un profondo interesse per la bellezza. Fin da piccolo, il giovedì era il giorno delle escursioni e mio nonno, appassionato di musei, mi portava a vedere delle mostre il più spesso possibile.* "

E aggiunge : "*Le mostre visitate quando ero piccolo, benché fossimo lontani da Parigi e dai grandi musei, mi hanno dato tanto.*"

Insistendo più in là : "*Non avevamo né tablet né le guide che davano spiegazioni sulla storia dei monumenti erano piuttosto rare. L'immaginazione giocava dunque un ruolo molto importante durante le visite, avevamo che le nostre intuizioni per far parlare le vecchie pietre. Ci piaceva sognare sui motivi, le gargolle, o su di una coppia di leoni che si davano battaglia su un capitello. L'analisi era certo disordinata, nessuno andava fino in fondo alle sue idee, ma conservo il ricordo di queste uscite come delle feste in famiglia. Potremmo non aver imparato molto, d'accordo, ma questi scambi erano una formazione del gusto e ci rendevano sensibili al piacere del dettaglio, alle impressioni ambientali.*"

In questo passaggio di Costamagna c'è tanto a mio avviso : l'immaginazione al lavoro, il tempo per sognare storie e analizzare un'opera, l'atmosfera festiva, la formazione del gusto personale, la scoperta dei dettagli, il piacere di assaporare le atmosfere degli ambienti visitati. Malgrado l'entusiasmo che ciascuno di noi può portare allo sguardo, all'osservazione fine e alla scoperta dei dettagli, soprattutto, spero, per quanto scritto fino adesso, ciò non deve creare l'idea che tutto sia raggiungibile facilmente.

Il problema seguente è un esempio, tra tanti, dove anche celebri matematici hanno sofferto prima di arrivare alla soluzione, malgrado che questa sia alla portata di ogni studente di scuola media !

Sia ABC un triangolo. Siano BB' et CC' due bisettrici interne al triangolo. Sapendo che $BB' = CC'$, dimostrare che il triangolo è isoscele.

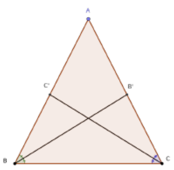


Figura 34: *Il problema di Steiner - Lehmus*

Di questo teorema, conosciuto come il problema di Steiner-Lehmus, sono state nel tempo diverse dimostrazioni geometriche, algebriche, trigonometriche, seguite da un'altra attribuita allo stesso Lehmus (1850), ma di cui è impossibile trovarne traccia. Quella che conosco è di Monsieur Descube (1888), identica a quella trovata, indipendentemente, dal mio collega Aziz El Kacimi con il quale portiamo avanti le nostre riflessioni sullo sguardo.

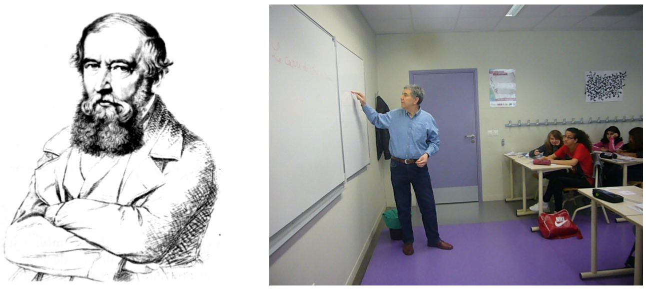


Figura 35: *Jacob Steiner (1796 - 1863) - Aziz El Kacimi*

10 Aperture

La domanda che molti colleghi mi hanno posto è quella se in un tale protocollo si potesse sostituire la pittura con altri campi della cultura. Il problema si può porre in posti dove non esistono musei o biblioteche.

La risposta che trovo adeguata in questi casi è : la natura ! Dappertutto ci sono piante, alberi e fiori. E ci sono libri, in mancanza di esperti, che possono aiutarci a osservare quanto la natura ci offre sotto gli occhi.

Ma qui vorrei lasciare più spazio alla letteratura e prendere un esempio tra tanti altri che saranno sviluppati altrove : Stefan Zweig (1881 - 1942) e il suo racconto *I miracoli della vita*

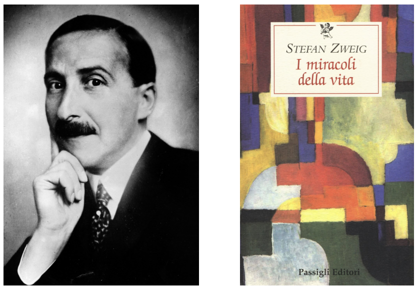


Figura 36: *Stefan Zweig (1881 - 1942)*

La novella di un centinaio di pagine, scritte in modo notevole, racconta una storia che si svolge alla metà del sedicesimo secolo ad Anversa. Un uomo ricco e pio desidera fare il dono di un quadro alla sua chiesa in guisa di ringraziamento per la guarigione miracolosa di sua madre e chiede ad un anziano pittore di realizzare un quadro della Madonna.

Non trovando la modella, l'anziano pittore pensa prima di essere incapace di eseguire il quadro, e nel momento in cui si appresta a rinunciare alla missione, come se avesse ricevuto un messaggio divino, si accorge di una giovane affacciata al balcone. Immediatamente, sa che sarà la sua modella per il quadro del ricco signore.

Prende allora la decisione di incontrarla per proporle di essere il suo modello per il quadro. Quando l'anziano pittore si presenta a casa sua, il padre adottivo della ragazza, gestore di una taverna, spiega al pittore che la ragazza è ebrea - la sola del paese - e che tutta la sua famiglia è morta e che non esce mai e che non parla a nessuno.

Il pittore non si scoraggia e, con l'accordo del padre adottivo, decide di prendere appuntamento con la giovane che finisce per accettare di prestarsi come modella.

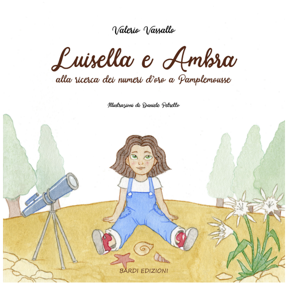
Il pittore, vedendo che la ragazza ha delle difficoltà ad entrare nel ruolo della Vergine, decide allora di rappresentare la Vergine con il Bambin Gesù. Il pittore riesce a trovare un neonato per eseguire il quadro. La nudità del bébé è all'inizio difficile da accettare per la giovane non abituata a vedere dei corpi nudi. Il tempo passa; la modella finisce per sviluppare un amore quasi materno per il bébé.

Una volta il quadro terminato e esposto nella chiesa, la giovane, non avendo più il bambino tra le braccia, ha un solo desiderio : contemplare tutti i giorni il quadro per avere il bambino ancora con lei. Ma, sfortunatamente, scoppia una rivolta e...

Il racconto è notevole non solo per la scrittura, cosa non sorprendente per un grande scrittore come Zweig, ma anche per la qualità dei dettagli e l'analisi fine dei personaggi e delle situazioni che lo scrittore austriaco ci offre.

Secondo me, è una bella riflessione dello sguardo in tutti i sensi.

Anch'io ho voluto esercitarmi nella scrittura e nella scultura per coltivare questa capacità di osservare i dettagli e beneficiarne nei momenti in cui mi dedico alla matematica. Il mio racconto *Louisella e Ambra* (Bardi Edizioni, Roma 2018) è una riflessione in questo senso, oltre ad essere un omaggio ad un matematico, Rudolf Bkouche, che fu uno tra i miei tanti maestri, e Fanny è une delle mie sculture eseguite con l'aiuto di Jocelyne di cui ho già parlato.



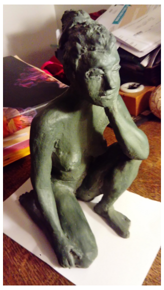


Figura 37: *Luisella e Ambra - Fanny pensierosa*

Quest'esercizio personale nell'arte mi ha appreso e continua ad apprendermi altri modi per aiutare i ragazzi ad entrare nel mondo della matematica.

Un anno fa, alla fine di un corso di analisi ho chiesto a i miei studenti se volessero ancora calcolare una primitiva oppure se preferivano che leggessi un passaggio di *Martin Eden* di Jack London. Restarono incuriositi dalla scelta che proponeva loro un insegnante di matematica. La lettura del passaggio del grande scrittore americano fu accettata all'unanimità con molto entusiasmo.

«*Martin riprese il suo articolo sui pescatori di perle, che tardava a finire, troppo spesso distratto dalle sue velleità poetiche. In quanto scriveva poemi d'amore, ispirati da Ruth e mai terminati. La prosodia non si imparava in un giorno. Non bisognava soltanto padroneggiare la rima, la metrica e la struttura, ma ancora - e ciò era più difficile - questa qualcosétta evasiva e impalpabile che percepiva nella grande poesia e che non riusciva a far entrare nella sua. Era lo spirito stesso della poesia che cercava, senza poterlo catturare. Era come un bagliore confuso, del vapore caldo e ottile, quasi sempre inafferrabile.* ».

Potrei scambiare la parola prosodia con "*analisi matematica*", " *geometria*" o "*aritmetica*" per capire dove voglio andare a finire : in matematica, come altrove, per esempio nella prosodia !, non c'è soltanto tanta tecnica da padroneggiare ma, se si vuole spiccare il volo, bisogna saper catturare questo qualche cosa di evasivo e d'impalpabile, ciò che Jack London designa " *lo spirito stesso della poesia* ".

La fotografia può ugualmente essere un altro esempio di apertura verso l'arte e di esercizio dello sguardo.

Due esempi tra tanti altri : Dorothea Lange e Henri Cartier-Bresson.

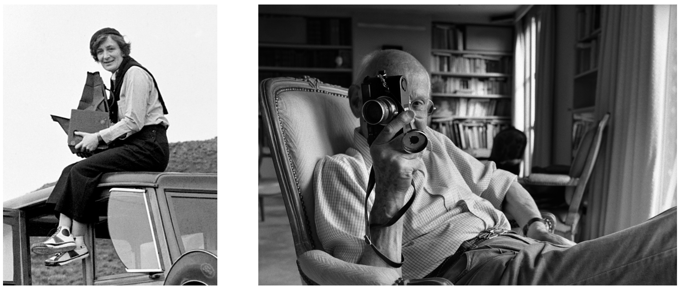


Figura 38: *Dorothea Lange (1895 - 1965) - Henri Cartier-Bresson (1908 - 2004)*

Riguardo all'arte, citerò, infine, il cinema e l'innumerevole schiera di film che potrebbero essere l'oggetto di analisi filmiche e di paralleli tra letteratura e cinema.

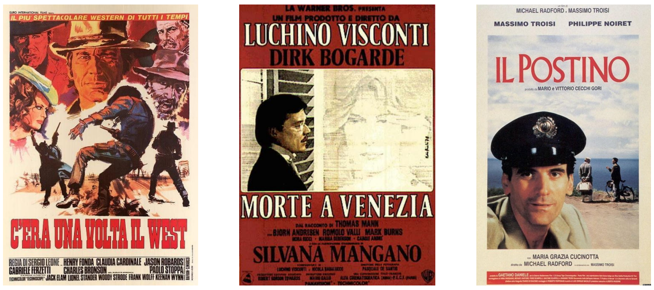


Figura 39: *Tre film giustamente celebri*

Su una placca posta a Trastevere in omaggio a Sergio Leone si può leggere : *Il mio modo di vedere le cose talvolta è ingenuo, un pò infantile, come i bambini della scalinata di Viale Glorioso.*

Il postino è un film franco-belga-italiano di Michael Radford uscito nel 1994, la sceneggiatura scritta da Antonio Skarmeta : l'azione si svolge negli anni '50 su un'isoletta del Mediterraneo. Mario Ruoppolo (Massimo Troisi) è un giovane incolto ; riesce a farsi assumere come postino (l'unico sull'isola !) per consegnare la posta a Pablo Neruda (Philippe Noiret), esiliato sull'isola. Tra il grande poeta cileno e Mario nasce una bella amicizia. Mario apprenderà il *potere della poesia*...

È interessante guardare il film ma anche il bonus offerto dal regista per capire i successivi piani dell'opera, nonché per apprezzare il talento dei due grandi attori.

In medicina si sente parlar spesso di quadro clinico (dal greco : Klìne, letto; klinikòs, che si svolge nel letto). Questo è l'insieme delle manifestazioni, segni, sintomi, che si presentano agli occhi del medico e che possono essere completate da diverse altre analisi dello stato del paziente (analisi del sangue, TAC...). Il quadro clinico contribuisce in modo decisivo alla diagnosi precisa di una malattia ciò che caratterizza, a mio avviso, un buon medico da un altro...

Figura 40: *The Doktor, di Luke Fildes (1843 - 1927)*

Delle iniziative analoghe a quella di Lille vedono il giorno altrove. All'iniziativa portata dall'Università Pierre et Marie Curie, si ritrovano il vice-rettore della facolta, il professor Alexandre Duguet, e il Dottor Rosenbaum, cardiologo all'Ospedale della Pitié-Salpétrière. Quest'ultimo spiega l'interesse d'integrare l'arte nei corsi universitari dei futuri medici : " *In medicina, si debbono guardare i segni e dar loro un senso. Si parla anche di " quadro clinico" . Allenare gli studenti ad affinare lo sguardo su di un quadro li aiuterà ad essere più attenti in presenza dei loro pazienti. Ciò è stato dimostrato da uno studio condotto dalla prestigiosa università di Yale, negli Stati-Uniti.*"

In definitiva, le esperienze condotte a Lille e a Roma sull'educazione allo sguardo sono state ricche, forti e fuor dei sentieri battuti. Permettono d'inventare un modo nuovo di concepire l'insegnamento e ci incoraggiano ad aprirle ad un gran numero di classi e scuole, ad introdurle nella formazione dei futuri insegnanti, a farle conoscere nella formazione continua.

Terminerò un pò come ho cominciato, cioè con una citazione dello scrittore Pascal Quignard presa dall'essai *Le sexe et l'effroi* (Gallimard, 1994) :

> *Qu'il ferme les yeux et qu'il rêve dans la nuit*
> *qu'il les ouvre et qu'il observe attentivement les choses réelles dans la clarté qu'épanche le soleil,*
> *que son regard se déroute et s'égare,*
> *qu'il porte les yeux sur le livre qu'il tient entre ses mains, qu'assis dans le noir il épie le déroulement d'un film,*
> *qu'il se laisse absorber dans la contemplation d'une peinture, l'homme est un regard désirant qui cherche une autre image derrière tout ce qu'il voit.*

Traduzione :

> *Che chiuda gli occhi e sogni durante la notte*
> *che li apra e osservi attentamente le cose reali nella luminosità che sparge il sole,*
> *che il suo sguardo si distragga e si perda,*
> *che porti gli occhi su un libro che tiene tra le sue mani, che seduto nel buio spii lo svolgimento di un film,*
> *che si lasci assorbire dalla contemplazione di una pittura, l'uomo è uno sguardo desideroso che cerca un'altra immagine dietro tutto ciò che vede.*

Post scriptum : e lo sguardo del caricaturista dove lo mettiamo ?

Figura 41: *Una caricatura dell'autore dell'articolo : artista sconosciuto di Piazza Navona, Roma (2002)*